

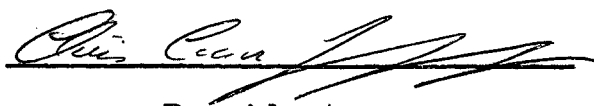
ESTUDO DE ALGUNS PROBLEMAS DE TRANSPORTE

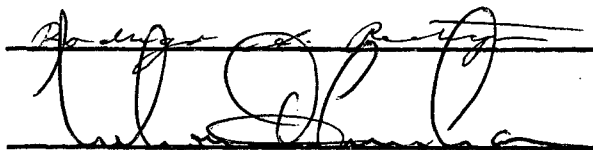
EM REDES COM FLUXO DINÂMICO

Ronaldo Cesar Marinho Persiano

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M. Sc.)

Aprovada por:


Presidente



RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

ABRIL DE 1971

Quero exprimir meu reconhecimento ao Prof. Pravin Varaya por seu incentivo e orientação inicial a êste trabalho, que foi elaborado sob sua inspiração.

Devo ao Clóvis a orientação constante e indispensável e a leitura criteriosa do manuscrito, trabalho que não respeitou fins-de-semana ou feriados.

A Celia devo, mais que o trabalho de datilografia, a amizade e dedicação durante a realização dêste estudo.

RESUMO

Definimos problemas dinâmicos de transporte como problemas de transporte em rêdes com fluxo dinâmico. O modelo de rêdes com fluxo dinâmico formulado neste trabalho trata de rêdes que admitem em cada ramo, um fluxo entrante e um fluxo saliente não necessariamente iguais. Uma equação diferencial relaciona a diferença entre os fluxos entrante e saliente de um ramo, a um "acúmulo de material" no ramo.

Com êste tratamento, podemos estudar as rêdes como sistemas dinâmicos cujos contrôles são dados pelos fluxos. Resultados de dualidade permitem-nos encontrar soluções para os problemas de controle ótimo resultantes com descentralização dos contrôles.

ABSTRACT

Dynamic transportation problems are defined as transportation problems in graphs with dynamic flow. The dynamic flow graph model presented in this work represents networks such that each branch admits as incoming flow and an outgoing flow, these flows not being necessarily equal. A differential equation relates the difference between incoming and outgoing flows to an "accumulation of material" in the branch.

This approach allows the study of graphs as dynamic systems the controls of which are given by the flows. Duality results lead to decentralized control solution for the optimal control problems formulated by the treatment above.

SUMÁRIO

<u>CAP. I</u>	Introdução	1
<u>CAP. II</u>	O problema estático de transporte	
SECÇÃO 1 -	Principais conceitos e resultados da teoria de rêdes com fluxo	7
SECÇÃO 2 -	Formulação do problema estático de transporte	15
SECÇÃO 3 -	Simulação analógica do (PT)	22
<u>CAP. III</u>	Rêdes dinâmicas e problemas dinâmicos de transporte	
SECÇÃO 1 -	Introdução	27
SECÇÃO 2 -	Modêlo de rêdes com fluxo dinâmico	29
SECÇÃO 3 -	Problemas dinâmicos de transporte	33
SECÇÃO 4 -	Solução do primeiro problema dinâmico de transporte	47
SECÇÃO 5 -	Conclusão	49

<u>CAP. IV</u>	Dualidade em problemas estáticos de transporte	
SECÇÃO 1 - Introdução		53
SECÇÃO 2 - Dualidade em problemas estáticos de transporte		55
SECÇÃO 3 - Conclusão		69
<u>CAP. V</u>	Solução do (PDT2) e (PDT3)	
SECÇÃO 1 - Introdução		71
SECÇÃO 2 - Solução de (PDT3)		72
SECÇÃO 3 - Solução de (PDT2)		82
SECÇÃO 4 - Conclusão		103
<u>CAP. VI</u>	Problemas dinâmicos de transporte e custos lineares	105
<u>CAP. VII</u>	Conclusão	111
<u>APÊNDICE A</u>	Dualidade em problemas convexos	113
<u>APÊNDICE B</u>	Um teorema de estabilidade para sistemas dinâmicos	124
<u>APÊNDICE C</u>	Um teorema de otimalidade para problemas de transporte com custo linear	126
<u>BIBLIOGRAFIA</u>		128

C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO

Dentre os problemas em rêdes com fluxo, o problema de transporte é o que tem merecido maior destaque na literatura. Nêste problema de otimização, a função critério é a soma de funções custo, cada uma delas definida no intervalo de restrição do fluxo de um ramo da rêde. O problema de transporte resume-se em encontrar um fluxo, satisfazendo as restrições de cada ramo da rêde e minimizando a função critério. Êste problema engloba a maior parte dos problemas de otimização em rêdes com fluxo.

O problema de transporte em rêdes tem sido bastante estudado na literatura sob diversas formas. Ford [3] faz um estudo para êsse problema com função custo linear; apresenta um algoritmo para a resolução do problema, assumindo que o vetor custo possui componentes inteiras. Berge [1] estuda o problema de transporte, supondo as funções custo con

vexas; apresenta um teorema de otimalidade para êsse problema, que será bastante importante em nosso trabalho. Em Berge [1], Berge [10] e Wagner [9] são também estudados problemas particulares sob diversos nomes. Todos êles podem ser formulados a partir do problema de transporte com funções custo convexas, que será estudado no capítulo II, juntamente com uma rápida revisão de rêdes com fluxo.

O modelo de rêdes com fluxo é inadequado ao tratamento de alguns problemas. Estudaremos um modelo de rêdes no qual o fluxo entrante em um ramo pode ser diferente do fluxo saliente do ramo, mantendo, porém, a conservação do fluxo nos nós. A fluxos dêste tipo denominaremos fluxos dinâmicos. A diferença não nula entre os fluxos entrante e saliente de um dado ramo provocará um "acúmulo de material" no ramo, que está relacionado aos fluxos por uma equação diferencial. Estes elementos caracterizam a rede dinâmica.

Os problemas dinâmicos de transporte são problemas de transporte em rêdes dinâmicas. Esta classe de problemas nos permitirá fazer um estudo de descentralização de decisões de problemas clássicos de transporte. O problema clássico pode ser encarado como um problema de decisão centralizada, onde um único centro controla tôdas as variáveis e tem acesso a todos os parâmetros envolvidos. Os problemas dinâmicos de transporte, por envolverem fluxos dinâmicos, permitem-nos estudar uma par-

ticular descentralização do controle de decisões.

A descentralização do controle é realizada criando-se tantos centros de decisão quantos forem os nós da rede. Cada centro terá controle sobre os "fluxos emergentes e imergentes ao seu nó". Cada ramo da rede terá um fluxo entrante e um fluxo saliente, não necessariamente iguais, cada um deles controlado por um centro diferente.

Além da descentralização do controle, haverá uma descentralização da informação dos parâmetros envolvidos. Cada centro terá um conjunto de informações que conterà todos os parâmetros ou parte deles. Estudaremos três problemas dinâmicos que diferirão somente quanto aos conjuntos de informação dos centros. Nos dois últimos, a informação restringir-se-á aos parâmetros locais, i. é, dos ramos adjacentes ao nó do centro de decisão.

O objetivo do controle descentralizado será o mesmo do controle central: estabelecer, na rede, um fluxo que minimize a função custo. Nos problemas dinâmicos de transporte, o fluxo dinâmico deve tender, com o tempo, a um fluxo ótimo para a rede. Contudo, em nenhum instante de tempo, o controle descentralizado deve permitir que o "acúmulo de material" em cada ramo ultrapasse certo limite, ou que o fluxo viole as suas restrições de viabilidade. O modelo de redes com fluxo dinâmico e os enunciados dos problemas dinâmicos ocupa-

rão o capítulo III do trabalho.

A resolução dos dois últimos problemas dinâmicos será baseada em resultados de dualidade do problema de transporte com custo convexo. O estudo de dualidade é feito no capítulo IV e a resolução dos problemas é apresentada no capítulo V.

Para a resolução dos dois últimos problemas dinâmicos é feita a hipótese de que as funções custo são estritamente convexas. O capítulo VI ocupa-se de mostrar como problemas com custo linear poderão ser tratados, apesar da hipótese de convexidade estrita citada acima. Contorna-se a dificuldade, construindo-se uma função custo estritamente convexa que forneça, como solução do problema de transporte, uma solução do problema linear.

No último capítulo, concluiremos que o problema de transporte pode ser tratado com decisão descentralizada, nos moldes enunciados no trabalho. Apresentam-se aplicações do modelo e sugestões para pesquisas futuras em problemas dinâmicos de transporte.

Apresentamos, agora, algumas observações sobre a notação adotada.

Notação

Os conjuntos de reais e naturais (incluindo o 0)

serão denotados por \mathbb{R} e \mathbb{N} , respectivamente. Um vetor de \mathbb{R}^m será uma matriz coluna, $m \times 1$, de elementos reais. Se x é um vetor de \mathbb{R}^m , a i -ésima componente do vetor x é representada por x_i . Dados dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^m$, o produto escalar será denotado por:

$$x'y \triangleq \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

Se M é uma matriz, M' é a transposta de M .

Dada uma matriz M , representaremos por M_{ji} o elemento da j -ésima linha e i -ésima coluna de M . Denotaremos por M_j a matriz linha formada pela j -ésima linha de M .

1 Se M é uma matriz $n \times m$, formada por elementos iguais a 0, 1 ou -1, denotaremos por M^+ e M^- as matrizes $n \times m$, definidas por:

$$2 \quad M_{ji}^+ = \begin{cases} 0 & \text{se } M_{ji} \neq 1 \\ 1 & \text{se } M_{ji} = 1 \end{cases}$$

$$3 \quad M_{ji}^- = \begin{cases} 0 & \text{se } M_{ji} \neq -1 \\ 1 & \text{se } M_{ji} = -1 \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

Dados dois vetores $b, d \in \mathbb{R}^m$ dizemos que $b \leq d$

se e só se

$$b_i \leq d_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

e dizemos que $b < d$ se e só se

$$b_i < d_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Se $b, d \in \mathbb{R}^m$ denotaremos por $[b, d]$ e (b, d) os conjuntos:

$$4 \quad [b, d] = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid b \leq x \leq d \right\}$$

$$5 \quad (b, d) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid b < x < d \right\}$$

Acrescentamos algumas notas quanto às referências. Os capítulos são numerados através de algarismos romanos; expressões e parágrafos, através de algarismos arábicos. No texto, um algarismo arábico entre parêntesis (por ex. (6)) indica a referência de uma expressão no mesmo capítulo. Referências a expressões em outros capítulos é feita através da numeração do capítulo, seguida da numeração da expressão (por ex. (I-1)). Referências bibliográficas são apresentadas entre chaves (por ex. Berge [1]).

C A P Í T U L O I I

O PROBLEMA ESTÁTICO DE TRANSPORTE.Introdução.

Iniciaremos êste capítulo com uma rápida revisão dos conceitos básicos de rêdes com fluxos e tensões. O enunciado do problema estático de transporte ocupa a secção 2, onde também é apresentado um teorema de otimalidade para êste tipo de problema. A última secção descreve as bases para uma simulação analógica do problema estático de transporte.

Os resultados dêste capítulo baseiam-se no trabalho de Berge [1] , onde as rêdes com fluxo e o problema estático de transporte são estudados de forma mais completa.

SECÇÃO 1 - PRINCIPAIS CONCEITOS E RESULTADOS DA TEORIA DE RÊDES COM FLUXOS.

Iniciamos esta secção com a definição de rêde a ser utilizada em nosso trabalho.

1 Definição: Uma rêde é um par ordenado (N, A) onde N é um conjunto finito e $A \subset N \times N$ um conjunto tal que

$$(\forall \gamma \in N) \quad (\gamma, \gamma) \notin A$$

Os elementos do conjunto N são os nós da rêde e os elementos de A , os ramos da rêde. Consideramos, portanto, rêdes com ramos orientados: se $(\gamma_1, \gamma_2) \in A$ e $(\gamma_2, \gamma_1) \in A$ então (γ_1, γ_2) e (γ_2, γ_1) são ramos distintos da rêde (N, A) .

Dado um ramo $\alpha = (\gamma_1, \gamma_2) \in A$ da rêde (N, A) , o nó γ_1 é dito extremidade inicial do ramo α e o nó γ_2 extremidade terminal de α .

Dada a rêde (N, A) chamaremos de ramo emergente do nó $\gamma \in N$ a todo ramo com extremidade inicial γ ; enquanto, ramo imergente ao nó $\gamma \in N$ será todo ramo com extremidade terminal γ . Dado $\gamma \in N$, denotaremos por $\omega^+(\gamma)$ o conjunto dos ramos emergentes de γ e por $\omega^-(\gamma)$ o conjunto dos ramos imergentes a γ . Assim, os conjuntos $\omega^+(\gamma)$ e $\omega^-(\gamma)$ podem ser descritos por:

$$2 \quad \omega^+(\gamma) = \left\{ \alpha \in A \mid \alpha = (\gamma, \delta), \delta \in N \right\}$$

$$3 \quad \omega^-(\gamma) = \left\{ \alpha \in A \mid \alpha = (\delta, \gamma), \delta \in N \right\}$$

Se $\gamma \in N$ denotamos: $\omega(\gamma) = \omega^+(\gamma) \cup \omega^-(\gamma)$

Em geral, dado um subconjunto P de N denotamos:

$$4 \quad \omega^+(P) = \{ (\gamma_1, \gamma_2) \in A \mid \gamma_1 \in P \text{ e } \gamma_2 \notin P \}$$

$$5 \quad \omega^-(P) = \{ (\gamma_1, \gamma_2) \in A \mid \gamma_1 \notin P \text{ e } \gamma_2 \in P \}$$

$$6 \quad \omega(P) = \omega^+(P) \cup \omega^-(P)$$

Dois nós $\gamma, \delta \in N$ são nós adjacentes, se

$\omega(\gamma) \cap \omega(\delta) \neq \emptyset$; $\alpha, \beta \in A$ são ramos adjacentes se exis-

te $\gamma \in N$ tal que $\alpha \in \omega(\gamma)$ e $\beta \in \omega(\gamma)$. O nó $\gamma \in N$

e o ramo $\alpha \in A$ são adjacentes se $\alpha \in \omega(\gamma)$.

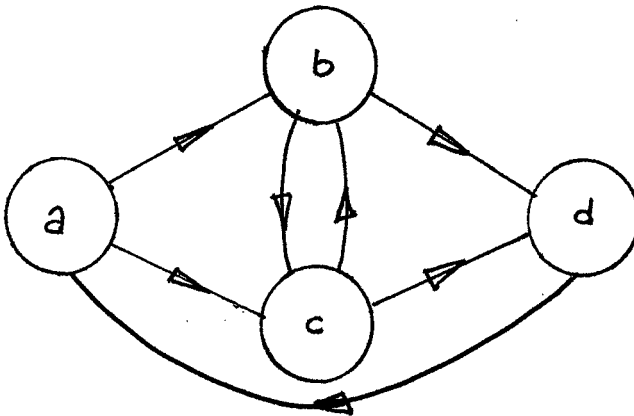
Uma representação gráfica de uma rede pode ser obtida simbolizando-se os nós por círculos e os ramos por segmentos orientados, unindo os nós aos quais são adjacentes.

Exemplo: A rede (N, A) onde

$$N = \{ a, b, c, d \}$$

$$A = \{ (a, b), (a, c), (b, c), (c, b), (b, d), (c, d), (d, a) \}$$

pode ser representada pela figura:



Nêste exemplo, obtemos:

$$\omega^+(b) = \{ (b,c), (b,d) \}$$

$$\omega^-(b) = \{ (a,b), (c,b) \}$$

Matriz de incidência.

De agora em diante, consideraremos uma r ede (N,A) com n n os e m ramos, e denotaremos:

$$7 \quad N = \{ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \}$$

$$8 \quad A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \}$$

N esse caso, a cada $\gamma_j \in N$ podemos associar um vetor $\omega \in \mathbb{R}^m$ da seguinte maneira:

$$9 \quad \omega_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_i \in \omega^+(\gamma_j) \\ -1 & \text{se } \alpha_i \in \omega^-(\gamma_j) \\ 0 & \text{se } \alpha_i \notin \omega(\gamma_j) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Com a associação definida por (9), passaremos a identificar os conjuntos $\omega(\gamma_j)$, $\gamma_j \in N$, com vetores de \mathbb{R}^m , utilizando, por vêzes, a mesma letra para representar, seja o vetor, seja o conjunto.

Observando-se (9) verifica-se que a topologia da rede (N, A) (relações de adjacências entre nós e ramos) fica determinada pelos vetores $\omega(\gamma_j) \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, \dots, n$. A topologia de (N, A) pode ser expressa, também, por uma matriz M , $n \times m$, definida por

$$10 \quad M_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_i \in \omega^+(\gamma_j) \\ -1 & \text{se } \alpha_i \in \omega^-(\gamma_j) \\ 0 & \text{se } \alpha_i \notin \omega(\gamma_j) \end{cases}$$

A matriz M é designada matriz de incidência da rede (N, A) .

Comparando-se (9) e (10) vemos que a j -ésima linha da matriz M e o vetor $\omega(\gamma_j) \in \mathbb{R}^m$ são iguais, ou seja:

$$11 \quad M_j' = \omega(\gamma_j)$$

A partir de M podemos determinar as matrizes M^+ e M^- designadas, respectivamente, matriz de emergências e matriz de imergências de (N, A) . As matrizes M , M^+ e M^- estão relacionadas por:

$$12 \quad M = M^+ - M^-$$

(ver notação em (I- 1)).

Cadeias e Ciclos.

Consideremos dois nós $\gamma, \delta \in N$.

- 13 Definição: Uma família $(\beta_i)_{i=1,2,\dots,k}$, $k \in \mathbb{N}$, de ramos de A , é uma cadeia de γ a δ se e só se existir uma família $(\delta_i)_{i=1,2,\dots,k+1}$, de nós de N , tal que:

- a) $\delta_1 = \gamma$ e $\delta_{k+1} = \delta$
 b) β_i é adjacente a δ_i e δ_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, k$.

Na definição (13) os nós γ e δ são chamados extremidade inicial e extremidade terminal da cadeia, respectivamente. Uma rêde (N, A) é dita conexa se para cada par de nós $\gamma, \delta \in N$ existir uma cadeia de γ a δ . Em nosso trabalho, consideraremos somente rêdes conexas.

- 14 Definição: Um ciclo da rêde (N, A) é uma cadeia com extremidades inicial e terminal coincidentes, formada por ramos distintos de A .

- 15 Considerando-se a definição (14), vê-se que dado um ciclo $\mathcal{C} = (\beta_i)_{i=1,2,\dots,k}$ da rêde (N, A) temos que existe uma família $(\delta_i)_{i=1,2,\dots,k}$ de nós de N , tal que:

- a) $\beta_1 \in \omega(\delta_k)$ e $\beta_k \in \omega(\delta_1)$
 b) $\beta_i, \beta_{i+1} \in \omega(\delta_i)$ $i = 1, 2, \dots, k-1$

O conjunto $\{ \delta_i \mid i=1,2,\dots,k \}$ é o conjunto de todos os nós da rede (N,A) , pelos quais o ciclo \mathcal{C} passa, i.é, dos nós adjacentes a algum ramo do ciclo \mathcal{C} . Nesse caso, dizemos que um ramo $\beta_i \in \mathcal{C}$ é positivamente orientado se $\beta_i \in \omega^+(\delta_i)$ isto é, se β_i é emergente de δ_i ; o ramo $\beta_i \in \mathcal{C}$ é negativamente orientado se $\beta_i \in \omega^-(\delta_i)$

16 Seja \mathcal{C}^+ o conjunto dos ramos positivamente orientados de \mathcal{C} , e \mathcal{C}^- o conjunto dos ramos negativamente orientados de \mathcal{C} . Consideremos o vetor $\mu \in \mathbb{R}^m$ definido por:

$$17 \quad \mu_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_i \in \mathcal{C}^+ \\ -1 & \text{se } \alpha_i \in \mathcal{C}^- \\ 0 & \text{se } \alpha_i \notin \mathcal{C} \end{cases}$$

Então, o ciclo \mathcal{C} fica bem definido pelo vetor $\mu \in \mathbb{R}^m$ definido em (17). Em vista disso, passaremos a identificar um ciclo com um vetor de \mathbb{R}^m ; essa identificação será realizada segundo (17) e, em geral, usando-se a mesma letra, μ , para designar seja a família, seja o vetor ciclo.

Fluxos e Tensões.

18 Definição: Um vetor $\varphi \in \mathbb{R}^m$ é um fluxo de (N,A) se e só se

$$19 \quad M \varphi = 0$$

onde M é a matriz de incidência de (N, A) . O real φ_i é dito fluxo do ramo $\alpha_i \in A$.

Da definição (10) da matriz de incidência M e de (19), podemos concluir que

$$20 \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)} \varphi_i = \sum_{\alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)} \varphi_k \quad j=1, 2, \dots, n$$

A equação (20) exprime que, para cada nó $\gamma_j \in N$, a soma dos fluxos dos ramos emergentes de γ_j é igual à soma dos fluxos nos ramos imergentes a γ_j . A equação (20) é a equação de conservação do fluxo φ no nó γ_j .

21 Definição: Um vetor $\theta \in \mathbb{R}^m$ é uma tensão de (N, A) se e só se

$$22 \quad \theta = -M'p$$

para algum $p \in \mathbb{R}^n$. O real θ_i é dito tensão do ramo $\alpha_i \in A$.

Se $\theta \in \mathbb{R}^m$ e $p \in \mathbb{R}^n$ satisfazem (22), o vetor p é dito vetor potencial. Em particular, o real p_j é dito potencial do nó $\gamma_j \in N$.

Da definição de matriz de incidência e de (22), pode-se verificar que se θ e p satisfazem (22) e

$\alpha_i = (\gamma_j, \gamma_k) \in A$ então:

$$23 \quad \theta_i = p_k - p_j$$

A tensão θ_i do ramo α_i é a diferença dos potenciais dos nós adjacentes ao ramo α_i .

Uma relação importante entre fluxos e tensões é obtida de (19) e (22). Se $\varphi \in \mathbb{R}^m$ é um fluxo e $\theta \in \mathbb{R}^m$ uma tensão, então,

$$24 \quad \theta' \varphi = - p' M \varphi = 0$$

SECÇÃO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA ESTÁTICO DE TRANSPORTE.

Existe uma grande quantidade de problemas de otimização em redes com fluxo, definidos na literatura técnica. Basicamente, êsses problemas de otimização resumem-se em encontrar um fluxo para uma dada rede, que satisfaça certas restrições especificadas e que minimize o valor de uma função critério.

As restrições impostas aos fluxos viáveis são intervalos de viabilidade para o valor do fluxo nos diversos ramos da rede. A função critério é do tipo separável, ou seja, é uma soma de funções reais, de variável real, cada uma delas definida no intervalo de viabilidade do fluxo de

um certo ramo.

Os diversos problemas de otimização, em rêdes, diferenciam-se pela estrutura particular da rêde, ou pela estrutura particular das restrições do fluxo, ou pela função critério usada. Resultam dessas estruturas particulares, problemas como: problema de "Hitchcock", problema de "assignment", de "transshipment", de "warehousing", de fluxo máximo, etc. (ver [3] , [9] , [10]).

Contudo, todos êsses problemas podem ser formulados de uma maneira única pelo problema de fluxo de custo mínimo, que designaremos aqui, de uma forma geral, por problema de transporte. Não nos ocuparemos de mostrar a inclusão daqueles problemas particulares nessa classe mais geral de problemas de transporte. Essa evidência pode ser esclarecida através de Ford [3] , capítulo 3, ou mais generalizada-mente em Berge [1] , capítulo 4, segunda parte. Formulemos, agora, o problema estático de transporte.

25 Consideremos a rêde (N,A) , conexa, com n nós e m ramos, definida em (7) e (8), e caracterizada pela matriz de incidência M . Sejam $b, d \in \mathbb{R}^m$ vetores, satisfazendo

$$0 \leq b \leq d.$$

Sejam f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, funções convexas definidas em $[b_i, d_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$, respectivamente, e com valores reais.

O problema clássico de transporte é o seguinte:

26. (PT) Encontrar, se existir, um vetor $\bar{\varphi} \in \Phi(b,d)$ tal que

$$27. \quad \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) = \min_{\varphi \in \Phi(b,d)} \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i)$$

onde

$$28. \quad \Phi(b,d) = \{ \varphi \in \mathbb{R}^m \mid M\varphi = 0, \varphi \in [b,d] \}$$

O (PT) consiste em um problema convexo. As funções f_i são ditas funções custo e o conjunto $[b,d]$, intervalo de viabilidade do fluxo. Um fluxo $\varphi \in \mathbb{R}^m$ é dito viável para o (PT) se e só se $\varphi \in \Phi(b,d)$. O (PT) resume-se em encontrar um fluxo viável para (N,A) com custo total mínimo.

Como o (PT) é um problema convexo, o seu conjunto de soluções é convexo; se as funções custo f_i são estritamente convexas, a solução de (PT), se existir, é única.

O teorema que se segue, devido a Hoffman, [11], fornece condições necessárias e suficientes para a existência de um fluxo viável para o (PT).

29. Teorema: Dados $b, d \in \mathbb{R}^m$, $0 \leq b \leq d$, o conjunto $\Phi(b,d)$, definido em (28), é não vazio se e só se para todo conjunto $P \subset N$ tivermos:

$$30 \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^+(P)} d_i \geq \sum_{\alpha_k \in \omega^-(P)} b_k$$

e

$$31 \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^-(P)} d_i \geq \sum_{\alpha_k \in \omega^+(P)} b_k$$

onde $\omega(P)$ foi definido em (4) - (6).

Prova: Ver Berge [1], pág. 159.

A interpretação do teorema é imediata. Dado $P \subseteq N$, $\omega(P)$ é o conjunto dos ramos unindo P a $N - P$. A inequação (30) exprime que "a máxima quantidade de fluxo que pode sair de P é maior ou igual à mínima quantidade de fluxo que pode entrar em P ". A inequação (31) tem o mesmo significado se substituirmos P por $N - P$.

Um corolário imediato do teorema (29) é o seguinte:

32 Corolário: Dados $b, d \in \mathbb{R}^m$ tais que $0 \leq b \leq d$, se $\Phi(b, d)$ é não vazio, então:

$$33 \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)} d_i \geq \sum_{\alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)} b_k \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$34 \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^-(\gamma_j)} d_i \geq \sum_{\alpha_k \in \omega^+(\gamma_j)} b_k \quad j=1, 2, \dots, n$$

Prova: Basta fazer, no teorema (29), $P = \{Y_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$

Teorema de Otimalidade para (PT).

Como o (PT), enunciado em (26), é um problema convexo, muitas condições de otimalidade poderiam ser utilizadas para o seu conjunto de soluções. Contudo, devido à estrutura particular do conjunto de pontos viáveis de (PT) e da própria separabilidade da sua função objetivo, condições bastante simples podem ser encontradas.

Desenvolveremos aqui, uma condição de otimalidade apresentada em Berge [1], de uma maneira particular (para o (PT)); e em Rockafellar [8], para problemas convexos em geral. Essa condição nos permitirá estabelecer as soluções para os problemas dinâmicos de transporte.

Para a formulação do teorema de otimalidade para o (PT), usaremos as subdiferenciais ∂f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, das funções custo (ver apêndice A, pág. A-2). Se $\bar{x}_i \in [b_i, d_i]$ e $\bar{w}_i \in \partial f_i(\bar{x}_i)$ então, por definição de ∂f_i , obtemos:

$$35 \quad (\forall x_i \in [b_i, d_i]) \quad f_i(x_i) \geq f_i(\bar{x}_i) + \bar{w}_i(x_i - \bar{x}_i)$$

O teorema que segue fornece uma caracterização para as subdiferenciais das funções custo de (PT) em um fluxo ótimo. No teorema assumimos que o (PT) é estável (ver apêndice A, pág. A-6)

36 Teorema: Suponhamos que o (PT) é estável. Um fluxo $\bar{\varphi} \in \Phi(b, d)$ é uma solução de (PT) se e só se existir uma tensão $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^m$ satisfazendo:

$$37 \quad \bar{\theta}_i \in \partial f_i(\bar{\varphi}_i) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Prova: Suponhamos que $\bar{\varphi} \in \Phi(b, d)$ e $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^m$ é uma tensão de (N, A) tal que

$$\bar{\theta}_i \in \partial f_i(\bar{\varphi}_i) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Então de (35) resulta: $(i = 1, 2, \dots, m)$

$$38 \quad (\forall \varphi_i \in [b_i, d_i]) \quad f_i(\varphi_i) \geq f_i(\bar{\varphi}_i) + \bar{\theta}'_i(\varphi_i - \bar{\varphi}_i)$$

Somando membro a membro as inequações (38) obtemos:

$$39 \quad (\forall \varphi \in [b, d]) \quad \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i) \geq \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) + \bar{\theta}'(\varphi - \bar{\varphi})$$

Em particular, se $\varphi \in \Phi(b, d)$ a expressão (39) assume a forma:

$$\sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i) \geq \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) + \bar{\theta}'(\varphi - \bar{\varphi}) = \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i)$$

pois, como $\bar{\theta}$ é uma tensão e φ e $\bar{\varphi}$ são fluxos, temos, devida (24):

$$\bar{\theta}'(\varphi - \bar{\varphi}) = 0$$

Logo, $\bar{\varphi}$ é solução de (PT).

Suponhamos, agora, que $\bar{\varphi} \in \Phi(b, d)$ é solução de (PT). Como (PT) é, por hipótese, estável, resulta do teorema de dualidade de Geoffrion [2] (ver apêndice A, pág. A-7) que existe

um multiplicador ótimo $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ para (PT). Logo, por definição de multiplicador ótimo, obtemos:

$$(\forall \varphi \in [b, d])$$

$$40 \quad \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i) + \bar{p}' M \varphi \geq \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) + \bar{p}' M \bar{\varphi}$$

ou seja,

$$(\forall \varphi \in [b, d])$$

$$41 \quad \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i) \geq \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) - \bar{p}' M(\varphi - \bar{\varphi})$$

De (41), podemos concluir que $\bar{\theta} \triangleq -M'\bar{p}$ é subgradiente em $\bar{\varphi}$ de $\sum_{i=1}^m f_i(\cdot)$ e por isso satisfaz (ver apêndice A, pág.): :

$$42 \quad \bar{\theta}_i \in \partial f_i(\bar{\varphi}_i)$$

Como $\bar{\theta} = -M'\bar{p}$ é uma tensão de (N, A) (ver (21)) e satisfaz (42), a prova está concluída. \triangleleft

Como todos os vínculos do (PT) são lineares, a subdiferenciabilidade de todas as funções custo implica em estabilidade do (PT) (ver apêndice A, teorema (A-25)). A condição de subdiferenciabilidade das funções custo será utilizada em todo o restante do trabalho.

Ressaltamos que a condição de estabilidade do (PT), além de suficiente, é necessária à validade do teorema (36). Esta evidência fica clara através do seguinte contra-exem-

plo: suponhamos que o (PT) não é estável mas tenha solução; então, como os vínculos de (PT) são lineares, alguma função custo é não subdiferenciável no ponto de solução de (PT) e, portanto, não existe uma tensão que satisfaça as condições do teorema.

Apesar disso, Berge [1] apresenta o teorema (36) sem impor a estabilidade de (PT) ou qualquer outra condição suficiente para estabilidade. De fato, qualquer condição de qualificação de vínculos de (PT) implica em estabilidade. Rockafellar [8] , em sua formulação mais geral do teorema, utiliza uma condição de qualificação semelhante à de Slater generalizada (ver pág. 336).

Baseado na condição do teorema (36), Berge [1] apresenta um algoritmo para a resolução do (PT) no caso de funções custo convexas seccionalmente lineares (pág. 211).

Além do algoritmo, Berge [1] sugere uma simulação analógica do problema estático de transporte. O estudo desta simulação é apresentado na próxima secção.

SECÇÃO 3 - SIMULAÇÃO ANALÓGICA DO (PT)

Dado um problema estático de transporte, podemos

construir um circuito elétrico resistivo conveniente que nos permita resolver o (PT). Se o vetor corrente solução do circuito elétrico fôr um vetor fluxo solução do (PT), dizemos que o circuito é uma simulação analógica do (PT).

A base da simulação analógica do (PT) é o critério de otimalidade do teorema (36). A simulação terá sentido somente se as hipóteses abaixo fôrem verificadas.

Hipóteses: As funções custo são estritamente convexas e o (PT) admite uma solução.

Se as funções custo f_i são estritamente convexas, então as subdiferenciais ∂f_i admitem uma função inversa h_i (ver apêndice A, pág. A-3). As funções h_i são funções bijetoras de \mathbb{R} em $[b_i, d_i]$, crescentes, e contínuas em \mathbb{R} .

44 Dada a função f_i , estritamente convexa, consideremos um dispositivo elétrico C_i , resistivo, controlado por tensão, que a cada diferença de potencial V_i entre suas extremidades define uma corrente I_i , no sentido positivo, dada por:

$$45 \quad I_i = h_i(V_i)$$

Cada dispositivo C_i é unívocamente determinado pela função f_i .

Construamos com os dispositivos C_i , $i = 1, 2, \dots, m$, um circuito elétrico \mathcal{C} , tendo a mesma topologia de (N, A) , da

seguinte forma:

1) o circuito elétrico terá n nós

$$N_1, N_2, \dots, N_n.$$

2) se $\alpha_i = (\gamma_j, \gamma_k) \in A$ então no circuito elétrico \mathcal{C} , o elemento C_i é ligado entre N_j e N_k sendo o sentido positivo da corrente de N_j a N_k .

O circuito elétrico \mathcal{C} assim construído é uma simulação analógica do (PT). De fato, as diferenças de potencial entre os nós de \mathcal{C} satisfazem as condições da definição de tensão em redes (lei das malhas de circuitos elétricos). As correntes nos elementos de \mathcal{C} satisfazem às condições da definição de fluxo em redes (lei dos nós de circuitos elétricos). Resta-nos provar que o fluxo de (N, A) , com as componentes numericamente iguais às do vetor corrente de \mathcal{C} , é um fluxo ótimo de (PT).

É evidente que a corrente $I \in \mathbb{R}^m$ do circuito é um fluxo viável para o (PT), pois devido a (45), e à definição das funções h_i , temos:

$$I \in [b, d]$$

O vetor $V \in \mathbb{R}^m$, de diferenças de potencial do circuito, é uma tensão da rede (N, A) . Mas, de (45) concluímos que a tensão V e o fluxo viável I satisfazem:

$$46 \quad V_i \in \partial f_i(I_i) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

De (46) e do teorema de otimalidade (36) resulta que o fluxo I é ótimo para o (PT).

Como nada ficou especificado sôbre a diferenciabilidade das funções f_i , estas funções podem admitir vários subgradientes em I_i . Em termos do circuito \mathcal{C} , esta condição significa que podem existir várias diferenças de potencial, $V \in \mathbb{R}^m$, satisfazendo (46).

Contudo, a convexidade estrita das funções custo garante a unicidade de solução de (PT), o que implica na unicidade das correntes I , satisfazendo (46) para alguma diferença de potencial V .

A importância da simulação analógica do (PT), para a resolução dêste problema, é bastante pequena pela dificuldade de sua implementação. A simulação do (PT) através de CSMP (linguagem para simulação analógica em computador digital) pode causar muitos problemas devido a não unicidade da tensão V e a ausência de elementos dinâmicos no circuito. Contudo, as idéias envolvidas na simulação serão úteis na resolução de um dos problemas dinâmicos que veremos no próximo capítulo.

Observamos que, no circuito elétrico, a corrente

solução nos dispositivos com um terminal em dado nó n_j depende exclusivamente de dados e parâmetros locais. Por parâmetros locais, entendemos os intervalos $[b_i, d_i]$ e as funções custo f_i nos ramos α_i adjacentes ao nó j da rede, associado ao nó n_j do circuito. Por dados locais, entendemos os potenciais p_k dos nós n_k adjacentes ao nó n_j . Este resultado será fundamental na resolução de um dos problemas dinâmicos.

O capítulo seguinte trata da apresentação formal de redes com fluxo dinâmico. Três problemas dinâmicos de transporte são enunciados e o primeiro deles é resolvido.

C A P Í T U L O I I I

RÊDES DINÂMICAS E PROBLEMAS DINÂMICOS DE TRANSPORTE.SECÇÃO 1 - INTRODUÇÃO.

No modelo de rêdes com fluxo, visto no capítulo anterior, assumíamos implicitamente que, em cada ramo, o fluxo entrante no ramo era igual ao fluxo saliente do mesmo. Passaremos a estudar rêdes onde essa condição de igualdade nem sempre é verificada. Aos fluxos dêste último tipo designaremos fluxos dinâmicos, em contraposição àqueles que satisfazem à definição (II-18), aos quais passaremos a chamar de fluxos estáticos.

Nêsse nôvo modelo, uma diferença entre os valores dos fluxos entrante e saliente de um ramo provocará um "acúmulo de material" no ramo, que está relacionado aos fluxos por uma equação diferencial. Esta equação caracterizará a dinâmica do modelo. O modelo de rêdes com fluxo dinâmico é apresentado na secção 2.

O estabelecimento de um fluxo ótimo, em uma rede com funções custo definidas, pode ser realizado por um contrôle centralizado, a partir do conhecimento das variáveis envolvidas. Os problemas dinâmicos de transporte são problemas de descentralização, onde cada centro de decisão controla os fluxos nos ramos adjacentes a um nó, a partir de dados de um conjunto de informações disponíveis. Os três problemas dinâmicos de transporte, que enunciamos na secção 3, diferem pelos conjuntos de informações disponíveis em cada centro de decisão. Nos dois últimos problemas, a informação será restrita a variáveis locais.

Nos problemas dinâmicos, a política de contrôle de cada centro de decisão deve garantir que, no regime, o fluxo estabelecido na rede tenda a um fluxo ótimo para o problema estático de transporte. Além disso, o contrôle deve garantir a viabilidade do fluxo, ao longo do tempo, e manter o "acúmulo de material", nos ramos, dentro de certas limitações.

Na secção 4, é apresentada a solução do primeiro problema dinâmico, a qual permite que o regime seja atingido em tempo nulo. A solução dos demais problemas dinâmicos é apresentada no capítulo V.

SECÇÃO 2 - MODELO DE REDES COM FLUXO DINÂMICO.

No modelo de redes com fluxo estático, visto nos capítulos anteriores, assumíamos que o fluxo estático era um vetor de \mathbb{R}^m satisfazendo a equação de conservação de fluxo nos nós da rede. Implícitamente, esta definição assume uma "conservação de fluxo em todos os ramos da rede", isto é; para todo ramo da rede "o fluxo entrante no ramo" é igual ao "fluxo saliente do ramo".

O que caracterizará um fluxo dinâmico será, justamente, a não necessidade de satisfazer esta última condição. Assim, o fluxo dinâmico será composto de dois vetores de \mathbb{R}^m : o primeiro representando os fluxos entrantes nos ramos da rede e o outro representando os fluxos salientes dos ramos da rede. Esses dois vetores não são, necessariamente, iguais. No entanto, não são completamente independentes, isto é, a conservação do fluxo nos nós da rede é mantida.

A dinâmica do modelo evidenciar-se-á quando os fluxos entrante e saliente não fôrem iguais. Então, uma diferença entre os dois fluxos, em um dado ramo, provocará a variação de um número associado ao ramo, a que chamaremos excedente do ramo. A relação entre a variação do excedente em um ramo e a diferença entre os fluxos entrante e saliente será expressa por uma equação diferencial.

Haverá, contudo, limitações nos excedentes dos ramos, que não deverão ser violadas. Formalizemos estes conceitos.

1 Consideremos a rede (N, A) , onde $N = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$
e $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, e a sua matriz de incidência M .

2 Definição: O limite de excedentes dos ramos da rede (N, A) é um vetor $\ell \in \mathbb{R}^m$ com $\ell \gg 0$.

3 Definição: Um excedente de ramos da rede (N, A) é um vetor $q \in \mathbb{R}^m$, com $q \geq 0$. Um excedente $q \in \mathbb{R}^m$ da rede (N, A) , com limite de excedente ℓ , é dito viável se

$$0 \leq q \leq \ell$$

Se ℓ é um limite de excedente e q um excedente da rede (N, A) os números ℓ_i e q_i , $i = 1, 2, \dots, m$, são ditos limite de excedente do ramo α_i e excedente do ramo α_i , respectivamente.

4 Definição: Um par ordenado (φ^1, φ^2) de vetores de \mathbb{R}^m é um fluxo dinâmico da rede (N, A) se

5
$$(\forall \gamma \in N) \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^-(\gamma)} \varphi_i^1 = \sum_{\alpha_i \in \omega^+(\gamma)} \varphi_i^2$$

ou, equivalentemente,

$$6 \quad (\forall \gamma \in N) \quad \omega^-(\gamma)' \varphi^1 = \omega^+(\gamma)' \varphi^2$$

onde $\omega^+(\gamma), \omega^-(\gamma)$ foram definidos em (II-11).

O vetor φ^1 é dito fluxo saliente e o vetor φ^2 fluxo entrante.

Nesta definição, a condição (5) (ou (6)) exprime para cada nó $\gamma \in N$ a equação de conservação de fluxo: a soma dos fluxos entrantes nos ramos emergentes de γ é igual à soma dos fluxos salientes dos ramos imergentes a γ . Por fluxo entrante em um ramo $\alpha_i \in A$ entendemos o real φ_i^2 ; e por fluxo saliente do ramo $\alpha_i \in A$ o real φ_i^1 .

7 Definição: Sejam $b, d \in \mathbb{R}^m$ vetores satisfazendo

$$8 \quad 0 \leq b \leq d$$

Um fluxo dinâmico (φ^1, φ^2) é dito viável para a rede (N, A) com intervalo de viabilidade de fluxo $[b, d]$ se

$$9 \quad b \leq \varphi^1 \leq d$$

e

$$10 \quad b \leq \varphi^2 \leq d$$

Em (7), um fluxo dinâmico é viável se os fluxos entrante e saliente tem componentes nos intervalos de viabilidade de cada ramo.

11 Se a r ede (N,A) tem por matriz de incidência a matriz M , e M^+ e M^- são, respectivamente, as matrizes de emergência e imerg ncia de ramos, (ver II- 12) a equação (6) pode ser reescrita em forma matricial. De fato, co
mo

$$M_j^+ = \omega^+(\gamma_j) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

e
$$M_j^- = \omega^-(\gamma_j) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(ver II- 11) então a condição (6) para que (φ^1, φ^2) seja um fluxo dinâmico assume a forma:

12
$$M^+ \varphi^2 = M^- \varphi^1$$

A relação (12)  , portanto, a equação de conservação do flu
xo dinâmico (φ^1, φ^2) .

13 Se um fluxo dinâmico (φ^1, φ^2) satisfaz

14
$$\varphi^1 = \varphi^2$$

então de (12) obtemos (usando (II- 12)):

15
$$0 = M^+ \varphi^2 - M^- \varphi^1 = (M^+ - M^-) \varphi^1 = M \varphi^1$$

Logo, φ^1   um fluxo estático para a r ede (N,A) . Nesse caso, diremos, por extensão, que (φ^1, φ^2)   um fluxo estático.

Dinâmica da R ede (N,A) .

17 A dinâmica da r ede (N,A) , com excedente $q(t)$ e

fluxo dinâmico $(\varphi^1(t), \varphi^2(t))$ no instante t , expressa pela equação diferencial:

$$18 \quad \frac{dq(t)}{dt} = \varphi^2(t) - \varphi^1(t)$$

Isto é, para cada ramo $\alpha_i \in A$ a derivada do excedente $q_1(t)$ é igual à diferença entre o fluxo entrante $\varphi_i^2(t)$ e o fluxo saliente $\varphi_i^1(t)$ do ramo α_i . O excedente $q(t)$ representa, portanto, o "acúmulo instantâneo de carga ou material", devido à diferença entre fluxos entrante e saliente da rede.

SEÇÃO 3 - PROBLEMAS DINÂMICOS DE TRANSPORTE.

19 Para a compreensão dos problemas dinâmicos de transporte, é conveniente abandonarmos, de início, o contexto abstrato de redes com fluxo. Consideremos, agora, a rede como um sistema dinâmico com entradas - componentes do fluxo dinâmico da rede - e estado - excedente de ramos da rede. O sistema tem seu comportamento regido pela dinâmica da rede.

20 Sob este ponto de vista, teremos nos problemas dinâmicos de transporte, n controladores das entradas, independentes entre si - um para cada nó da rede. Cada controlador, sediado em um dado nó, tem atuação sobre parte das entradas: as componentes do fluxo entrante nos ramos emergentes do nó e as componentes do fluxo saliente nos ramos imergentes ao nó. Portanto, cada controlador atua sobre entradas distintas

do sistema e cada entrada é atuada por algum controlador.

21 Para a decisão do controle, os controladores contam com um certo espaço de informações, que variará de um problema a outro. De qualquer modo, o excedente - estado do sistema - ou parte dele (algumas componentes) pertencerá ao espaço de informações de cada controlador. Trata-se, portanto, de uma realimentação de estado.

Os três problemas dinâmicos que apresentaremos diferirão, basicamente, nos espaços de informações dos controladores.

22 Uma função custo será definida para o sistema, associando a cada entrada um número real. Um dos objetivos do controle descentralizado do sistema será atingir um estado de equilíbrio do sistema (estabilizando-o, portanto), mantendo-se o fluxo e o excedente sempre dentro de seus intervalos de viabilidade. O outro objetivo é o de minimizar a função custo quando o regime for atingido.

Atingir uma condição de regime para o sistema implica em obtermos um excedente com derivada nula. Portanto, o fluxo dinâmico, definido pela decisão dos controladores, deve tender, no regime, a um fluxo estático que minimize a função custo.

23 Os problemas dinâmicos de transporte são problemas

de controle ótimo com realimentação. Busca-se, nestes problemas, uma política de decisões para cada um dos controladores, que satisfaça o objetivo descrito acima. Então, os controladores, atuando sobre conjuntos distintos de entradas do sistema, a partir de espaços de informações distintos ou não, têm objetivos comuns, não conflitantes. Problemas deste último tipo são classificados por Radner, Marschak e outros, como "problemas de equipe" ("team problems") (ver [4] , [5]).

Antes de formalizarmos as condições acima, adotemos a seguinte

24 Notação: Se $s \in \mathbb{R}^m$ e $\gamma_j \in N$, denotaremos por s^j o vetor de \mathbb{R}^m definido por:

$$s_i^j = \begin{cases} s_i & \text{se } \alpha_i \in \omega(\gamma_j) \\ 0 & \text{se } \alpha_i \notin \omega(\gamma_j) \end{cases}$$

Por outro lado, se F é o conjunto de funções

$$F = \{ f_1, f_2, f_3, \dots, f_m \}$$

denotaremos por F^j o conjunto

$$F^j = \{ f_i \in F \mid \alpha_i \in \omega(\gamma_j) \}$$

Introdução aos Problemas Dinâmicos

Consideremos a rede (N, A) e a sua matriz de incidência M definidas em (1).

Para fixar a notação, sejam $b, d, \ell, q \in \mathbb{R}^m$, $0 \leq b \leq d$

$[b, d]$	intervalo de viabilidade de fluxo
ℓ	limite de excedente
q	excedente
$f_i: [b_i, d_i] \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$	
	funções custo convexas

Os elementos acima não são dados para os problemas e sim, parâmetros. De fato, imporemos que os controladores adaptem suas políticas a possíveis mudanças desses parâmetros quando o sistema estiver em regime.

25 Fluxos Dinâmicos Definidos pelos Contrôles.

As políticas solução do problema devem ser funções, uma para cada nó ou controlador, definidas no espaço de informações e cujos valores determinarão o controle - fluxo dinâmico da rede.

Em um dado nó e em dado instante, o valor da função controle do nó deverá ser um par de vetores de \mathbb{R}^m : o primeiro é o vetor de fluxo saliente do nó - com zeros nas componentes relativas aos ramos não imergentes ao nó; o segundo é o vetor de fluxo entrante do nó - com zeros nas componentes relativas aos ramos não emergentes do nó. A soma de todos os fluxos salientes dos nós será o fluxo saliente da rede. Igualmente, a soma de todos os fluxos entrantes dos nós será o fluxo entrante da rede. Esse par - fluxo saliente, fluxo entrante - determinará o fluxo dinâmico da rede.

Observação: Não se confunda fluxo entrante do nó com fluxo imergente ao nó.

Por fluxo entrante do nó entenda-se: fluxo entrante nos ramos emergentes ao nó. Igualmente, por fluxo saliente do nó entenda-se fluxo saliente dos ramos imergentes ao nó. Essas expressões são usadas ao confundirmos o controlador do nó com o próprio nó.

Seja $(x^j(t), y^j(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ o valor do controle do nó γ_j no instante t ($j = 1, 2, \dots, n$). Para que os vetores $x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)$ definam um fluxo saliente

$$26 \quad \varphi^1(t) = \sum_{j=1}^n x^j(t)$$

e que os vetores $y^1(t), y^2(t), \dots, y^n(t)$ definam um fluxo entrante

$$27 \quad \varphi^2(t) = \sum y^j(t)$$

esses vetores devem satisfazer:

$$28 \quad M_j^- x^j(t) = M_j^+ y^j(t) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Para que o fluxo dinâmico $(\varphi^1(t), \varphi^2(t))$, definido pelos controles no instante t , seja viável, devemos ter

$$29 \quad \left[\begin{array}{l} b_i \leq x_i^j(t) \leq d_i, \alpha_i \in \omega^-(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ b_i \leq y_i^j(t) \leq d_i, \alpha_i \in \omega^+(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

30 Problema Estático Associado.

A condição de otimalidade do contrôle, no regime, refere-se ao problema estático associado ao problema dinâmico de transporte. Por problema estático associado entendemos o (PT) (II-26) com intervalo de viabilidade $[b, d]$, matriz de incidência M e funções custo convexas f_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Vejamos, agora, as

31 Condições de Regime.

A condição de regime exige que o fluxo dinâmico $(\varphi^1(t), \varphi^2(t))$, definido em (26) e (27) tenda, no regime, a uma solução do problema estático associado. Formalmente, podemos escrever que $(\varphi^1(t), \varphi^2(t))$ deve satisfazer:

$$32 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^2(t) = \bar{\varphi} \in \mathbb{R}^n$$

onde $\bar{\varphi}$ é solução do problema estático associado (30). A condição (32) deve ser satisfeita para qualquer excedente inicial $q^0 \in (0, \ell)$. Mais tarde, comentaremos a razão da restrição, que ora fazemos ao espaço viável dos excedentes iniciais.

33 Viabilidade do excedente.

Os contrôles do sistema devem ser tais que, a to-

do instante, o excedente da rede mantenha-se viável.

Se $q(t) \in \mathbb{R}^m$ é o excedente da rede no instante t e $q^0 \in (0, \ell)$ é o excedente inicial da rede, a condição de viabilidade do excedente fica expressa por:

$$34 \quad 0 \leq q(t) \leq q^0 + \int_0^t (\varphi^2(t) - \varphi^1(t)) dt \leq \ell$$

A igualdade em (34) resulta da dinâmica da rede (18).

35 Espaços de Informações.

Como dissemos anteriormente, estudaremos três problemas dinâmicos, que diferirão pelos espaços de informações dos controladores.

Cada controlador, em qualquer dos três problemas, terá, em realidade, dois espaços de informações: o espaço de informações paramétricas e o espaço de informações instantâneas.

O espaço de informações paramétricas conterá variáveis que só poderão ter os seus valores alterados como nova inicialização do sistema (por ex.: funções custo, limite de excedente, etc.). O espaço de informações instantâneas conterá as variáveis que podem ter seus valores alterados em função da evolução do sistema (excedente, por ex.).

A partir dos dados do espaço de informações para-

métricas, cada controlador definirá uma política que associará às informações instantâneas os controles instantâneos. Da busca dessas funções parametrizadas é que consiste cada problema dinâmico.

Os espaços de informações paramétricas, de cada controlador j , em cada um dos problemas dinâmicos, são os seguintes:

Primeiro Problema: intervalo de viabilidade de fluxo $[b, d]$, funções custo f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, limite de excedente ℓ , excedente inicial $q^0 \in [0, \ell]$.

Segundo Problema: intervalo de viabilidade de fluxo $[b_i, d_i]$, funções custo f_i , limite de excedente e excedente inicial $q_i^0 \in (0, \ell_i)$, associados aos ramos α_i adjacentes ao nó χ_j .

Terceiro Problema: O espaço é idêntico ao do segundo problema.

Os espaços de informações instantâneas de cada controlador j , em cada um dos problemas dinâmicos, são:

Primeiro Problema: o excedente instantâneo $q(t)$.

Segundo Problema: os excedentes instantâneos $q_i(t)$ nos

ramos α_i , adjacentes ao nó γ_j .

Terceiro Problema: os excedentes instantâneos $q_i(t)$ nos ramos α_i adjacentes ao nó γ_j , e informações instantâneas $p_k(t) \in \mathbb{R}$ vindas dos controladores k , tais que γ_k é adjacente a γ_j .

Portanto, no terceiro problema, cada controlador deve definir, além da política de controle, uma política de informações para os controladores adjacentes. A política de informações terá o mesmo domínio da política de controle.

36 Primeiro Problema Dinâmico de Transporte.

No primeiro problema, os dados que cada controlador obtém do seu espaço de informações paramétricas são: $[b, d]$, f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, ℓ e $q(0)$. A política de contrôle de cada controlador j deverá ser uma função

$$H_j(b, d, F, \ell, q(0)) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

onde F é o conjunto das f_i . A política de controle deve associar a cada excedente instantâneo um par de vetores que definam os fluxos entrantes nos ramos emergentes de γ_j e os fluxos salientes dos ramos imergentes a γ_j .

Portanto, o controle assume a forma:

$$(\forall q(t) \in [0, \ell])$$

$$37 \quad H_j(b, d, F, \ell, q(0)) \quad (q(t)) = (x^j(t), y^j(t))$$

onde $x^j(t), y^j(t) \in \mathbb{R}^m$ devem satisfazer:

$$38 \quad (\forall t \geq 0) \quad M_j^+ y^j(t) = M_j^- x^j(t)$$

$$39 \quad (\forall t \geq 0) \quad \begin{cases} y_i^j(t) = 0 & \text{se } M_{ji}^+ = 0 \\ x_k^j(t) = 0 & \text{se } M_{jk}^- = 0 \end{cases}$$

A condição (38) representa a conservação de fluxo em γ_j , enquanto que em (39) restringe-se o controle do controlador j aos ramos adjacentes a γ_j .

Com essa notação fixada, enunciemos o primeiro problema.

Enunciado do (PDT1).

- 40 (PDT1) Dada a rede (N, A) com n nós e m ramos, encontrar, se existirem, funções $H_j(b, d, F, \ell, q(0))$, $j = 1, 2, \dots, n$, parametrizadas por b, d, F, ℓ e $q(0)$, e com valores satisfazendo (37) - (39), que, para quaisquer:
- i) intervalo de viabilidade de fluxo $[b, d]$
 - ii) funções custo convexas f_i , $i = 1, 2, \dots, m$
 - iii) limite de excedente ℓ

- iv) excedente inicial $q(0) \in [0, \ell]$,
gerem fluxos dinâmicos satisfazendo:
- v) as condições de viabilidade e conservação
do fluxo (26) - (29)
- vi) a condição de regime (31)
- vii) a viabilidade do excedente (33).

41 Segundo Problema Dinâmico de Transporte.

As diferenças entre o segundo problema e o (PDT1) são somente quanto à dimensão dos espaços de informações. No segundo problema, o espaço de informações paramétricas do controlador j fica reduzido a $b^j, d^j, F^j, \ell^j, q^j(0)$, onde o superíndice indica uma "restrição" dos vetores e conjuntos aos ramos adjacentes ao nó γ_j , conforme a notação (24).

Da mesma forma que em (PDT1), as políticas de controle serão funções definidas no espaço dos excedentes instantâneos. Agora, porém, o espaço de informações instantâneas ficará reduzido ao excedente $q^j(t)$ nos ramos adjacentes a γ_j .

Portanto, a política de controle deverá ser uma função

$$H_j(b^j, d^j, F^j, \ell^j, q^j(0)) : [0, \ell^j] \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

A política de controle deve satisfazer: $(\forall t \geq 0)$

$$42 \quad H_j(b^j, d^j, F^j, \ell^j, q^j(0)) (q^j(t)) = (x^j(t), y^j(t))$$

$$43 \quad M_j^- x^j(t) = M_j^+ y^j(t)$$

$$44 \quad x_k^j(t) = 0 \quad \text{se} \quad M_{jk}^- = 0$$

$$y_i^j(t) = 0 \quad \text{se} \quad M_{ji}^+ = 0$$

Com essas notas, podemos enunciar o segundo problema:

Enunciado do (PDT2).

- 45 (PDT2) Dada a rede (N, A) com n nós e m ramos, encontrar, se existirem, funções $H_j(b^j, d^j, F^j, \ell^j, q^j(0))$, $j = 1, 2, \dots, n$, parametrizadas por $b^j, d^j, F^j, \ell^j, q^j(0)$ e com valores satisfazendo (42) - (44), tais que, para quaisquer:
- i) intervalo de viabilidade de fluxo $[b, d]$
 - ii) funções custo convexas f_i , $i = 1, 2, \dots, m$
 - iii) limite de excedente ℓ
 - iv) excedente inicial $q(0) \in (0, \ell)$
- gerem fluxos dinâmicos satisfazendo:
- v) as condições de viabilidade e conservação do fluxo (26) - (29)
 - vi) a condição de regime (31)
 - vii) a viabilidade do excedente (33).

Terceiro Problema Dinâmico de Transporte

O terceiro problema difere do segundo apenas no espaço de informações instantâneas dos controladores. Agora, o espaço de informações instantâneas, de um controlador em dado nó, será um pouco "ampliado": incluirá informações provenientes dos controladores dos nós adjacentes ao nó considerado, além dos excedentes instantâneos nos ramos adjacentes.

A informação extra, que será intercambiada entre dois controladores de nós adjacentes, deverá ser sob a forma de um número real. Portanto, a dimensão do espaço de informações instantâneas, no terceiro problema, excede em uma unidade, por nó adjacente, a dimensão daquele espaço no segundo problema.

A informação instantânea adicional entre controladores adjacentes será estabelecida por funções parametrizadas pelas informações paramétricas, e definidas no espaço de informações instantâneas de cada controlador. Ou seja, dadas as informações paramétricas

$$b^j, a^j, F^j, \ell^j, q^j(0)$$

a função de informação $E_j(b^j, a^j, F^j, \ell^j, q^j(0))$ do controlador j será tal que:

$$47 \quad E_j(b^j, d^j, F^j, \ell^j, q^j(0)) : \mathbb{R}^{m_j} \times [0, \ell^j] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$48 \quad E_j(b^j, d^j, F^j, \ell^j, q^j(0)) (p^j(t), q^j(t)) = p_j(t) \in \mathbb{R}$$

onde m_j é o número de nós adjacentes a γ_j , e $p^j(t)$ é um vetor de \mathbb{R}^{m_j} formado pelos $p_k(t)$ dos nós $\gamma_k \in N$ adjacentes a γ_j .

A política de controle será definida de forma semelhante a dos problemas anteriores tendo, agora, como domínio, o espaço de informações instantâneas ampliado. Dessa forma, dadas as informações paramétricas, a função de controle

$$49 \quad H_j(b^j, d^j, F^j, \ell^j, q^j(0)) : \mathbb{R}^{m_j} \times [0, \ell^j] \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

do controlador j , deverá satisfazer:

$$50 \quad H_j(b^j, d^j, F^j, \ell^j, q^j(0)) (p^j(t), q^j(t)) = (x^j(t), y^j(t))$$

$$51 \quad M_j^+ y_j(t) = M_j^- x^j(t)$$

$$x_k^j(t) = 0 \quad \text{se} \quad M_{jk}^+ = 0$$

$$y_i^j(t) = 0 \quad \text{se} \quad M_{ji}^- = 0$$

Com essa notação, enunciemos o (PDT3).

Enunciado do (PDT3).

- 53 (PDT3) Dada a rede (N, A) com n nós e m ramos, encontrar, se existirem, funções $E_j(b^j, d^j, F^j, \ell^j, q^j(0))$ e $H_j(b^j, d^j, F^j, \ell^j, q^j(0))$, $j = 1, 2, \dots, n$, parametrizadas por b^j, d^j, F^j, ℓ^j , e $q^j(0)$ e com valores satisfazendo (47) - (52), tais que, para quaisquer:
- i) intervalo de viabilidade de fluxo $[b, d]$
 - ii) funções custo convexas f_i , $i = 1, 2, \dots, m$
 - iii) limite de excedente ℓ
 - iv) excedente inicial $q(0) \in [0, \ell]$
- gerem fluxos dinâmicos satisfazendo:
- v) as condições de viabilidade e conservação de fluxo (26) - (29)
 - vi) a condição de regime (31)
 - vii) a viabilidade do excedente (33).

SECÇÃO 4 - SOLUÇÃO DO PRIMEIRO PROBLEMA DINÂMICO DE TRANSPORTE.

O (PDT1) sempre admite solução que pode ser trivialmente encontrada. Considere-se o problema estático de transporte associado ao (PDT1). Dado um algoritmo para a resolução de problemas estáticos de transporte, (vários algoritmos encontram-se nas referências citadas) podemos defi

nir um mapeamento H que, a partir da matriz de incidência da rede, do intervalo de viabilidade do fluxo, das funções custo, associa uma solução do problema estático de transporte.

Então, o mapeamento H é da forma:

$$54 \quad H(M, b, d, F) = \bar{\varphi} \in \mathbb{R}^m$$

onde M é a matriz de incidência da rede, $[b, d]$ o intervalo de viabilidade do fluxo, F o conjunto de funções custo convexas e $\bar{\varphi}$ a solução do problema de transporte. Através do mapeamento H , podemos definir a política $H_j(b, d, F, \ell, q(0))$, de \mathbb{R}^m a $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, para cada nó j .

Sejam $\bar{x}^j, \bar{y}^j \in \mathbb{R}^m$ vetores dados por:

$$x_k^j = \begin{cases} \bar{\varphi}_k & \text{se } \alpha_k \in \omega^-(j) \\ 0 & \text{se } \alpha_k \notin \omega^-(j) \end{cases}$$

$$y_i^j = \begin{cases} \bar{\varphi}_i & \text{se } \alpha_i \in \omega^+(j) \\ 0 & \text{se } \alpha_i \notin \omega^+(j) \end{cases}$$

onde $\bar{\varphi}$ é dado por (54). Para definirmos a política, basta tomarmos:

$$55 \quad (\forall q \in [0, \ell]) \quad H_j(b, d, F, \ell, q(0))(q) = (\bar{x}^j, \bar{y}^j)$$

É evidente que com essa política de controle, todas as condições do enunciado do (PDT1) são satisfeitas.

O resultado importante da política (55) é que essa política independe, seja do excedente inicial, seja do excedente instantâneo, e o regime é atingido em tempo finito.

SECÇÃO 5 - CONCLUSÃO

No estudo da descentralização de controle de uma "rede dinâmica de transporte", os três problemas que apresentamos, representam três níveis de descentralização qualitativamente distintos. No primeiro problema, apesar do controle descentralizado, a informação total de que dispõem os controladores implica em que cada controlador aja como agiria um centro único de decisão.

O terceiro problema apresenta-se, na escala de redução de informações dos controladores, em segundo nível. O sistema passa, então, a ter uma descentralização real, não somente em relação ao controle de decisões, como em relação à disponibilidade de informação de cada centro de decisão. A descentralização da informação no segundo problema importa, em termos práticos, em uma economia na implementação e manutenção do sistema de controle. De fato, no primeiro problema, o "custo de operação" é elevado, já que todo o conjunto de informações paramétricas deve ser distribuído a todos os centros de decisão.

Apesar dessa redução no espaço de informações, veremos que, no terceiro problema, a informação intercontroladores é de certa forma "equivalente" à informação total no sentido de permitir que cada controlador construa parte da simulação de (PT) obtendo a simulação completa através da

informação intercontroladores.

O segundo problema apresenta-se em um nível superior ao do terceiro, no escalonamento de redução da informação disponível aos controladores. Nesse caso, a inexistência de informações intercontroladores restringe o espaço de informações instantâneas a variáveis fora do contrôle independem do tempo, a variação do excedente não é um dado acessível. Se algum tipo de memória existisse nos centros de contrôle, informações sôbre as variáveis não locais poderiam ser obtidas pelos controladores por integração de excedentes, por exemplo. Isto não é, porém, permitido.

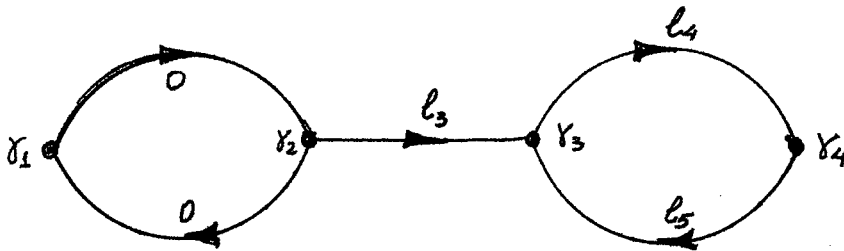
Percebe-se, portanto, que no segundo problema, a descentralização chega ao "máximo ou próximo dêle". Com isso queremos dizer que uma redução maior do espaço de informações deverá, em geral, impedir a existência de solução. Isto nos permite dizer, de modo impreciso, que o segundo problema representa a descentralização com o "mínimo de informações" para os controladores, que admite solução.

Quanto aos aspectos técnicos dos enunciados, que remos discutir, agora, a razão da restrição do excedente inicial $q(0)$ ao intervalo $(0, \ell)$. Primeiramente, observe-se que no primeiro e terceiro problemas, o excedente ins

instantâneo não chega a ser uma informação de crucial relêvo para os controladores. O mesmo não acontece no segundo problema, onde o excedente instantâneo é a única informação instantânea de que dispõem os controladores.

Se o excedente inicial fôr igual a 0 ou ℓ , qualquer contrôle viável, i. é, que garanta a viabilidade do excedente, manterá o excedente inalterado. Isto é devido ao fato da soma dos excedentes dos ramos ser constante com o tempo. Em outros casos, menos triviais, se os excedentes iniciais dos ramos assumem valores extremos, as conclusões acima ainda são válidas.

Consideremos, como exemplo, a rêde abaixo, onde os números nos ramos indicam o valor do excedente inicial:



No exemplo acima, pode-se verificar que nenhum contrôle viável para os nós x_1, x_2, x_3, x_4 poderá alterar o excedente.

Nos casos acima, além das informações locais paramétricas e do excedente instantâneo, alguma outra informação tem que ser fornecida aos controladores para que pos

sam estabelecer o fluxo estático. Mas essa informação, existente no primeiro e no terceiro problemas, inexiste no segundo. Portanto, para alguns tipos de rede e alguns casos de excedentes iniciais extremos, não existe uma política solução do segundo problema.

Existe uma classe de redes que admitem, em princípio, solução para o (PDT2), mesmo com excedentes iniciais extremos. Esta classe é a das redes fortemente conexas ("para qualquer par ordenado de nós, existe uma cadeia do primeiro ao segundo nó com todos os ramos positivamente orientados"). Contudo, mesmo para essa classe, o vetor excedente inicial igual a 0 ou ℓ é proibido.

Uma outra razão para excluirmos a possibilidade de excedentes iniciais extremos surgirá como consequência de nosso método de solução para o (PDT2), e será apresentada então. (Ver (V-24)).

Para a resolução do segundo e terceiro problemas, necessitaremos de resultados de dualidade do problema estático de transporte, que apresentamos no próximo capítulo.

C A P Í T U L O I V

DUALIDADE EM PROBLEMAS ESTÁTICOS DE TRANSPORTESECÇÃO 1 - INTRODUÇÃO

No capítulo anterior vimos o modelo dinâmico de redes e os enunciados de alguns problemas dinâmicos de transporte. O fluxo dinâmico caracterizava-se por não satisfazer necessariamente a conservação de fluxo nos ramos da rede.

Para estudar os problemas dinâmicos de transporte, interessa-nos considerar o conjunto de pontos viáveis do (PT) (II-26) como formado por fluxos dinâmicos viáveis satisfazendo a restrição de conservação de fluxo nos ramos da rede. Dualizando em relação a esta restrição o problema resultante, obteremos um problema dual com características de separabilidade, de grande valia para a resolução do (PDT2) e (PDT3).

Apresentaremos neste capítulo o estudo de dualização proposto acima, seguido de alguns lemas necessários às soluções de (PDT2) e (PDT3) propostas no capítulo V.

Para podermos aplicar a teoria de dualidade de Geoffrion [2], necessitaremos da hipótese de estabilidade de (PT). Condições suficientes para a estabilidade de (PT), mais facilmente verificáveis, serão utilizadas em nosso tratamento. Além disso, as hipóteses de convexidade estrita e continuidade das funções custo serão assumidas, para desenvolvermos a solução dos problemas dinâmicos.

1 Em todo o capítulo, consideraremos uma rede (N,A) , conexa, com n nós e m ramos dados por:

2
$$N = \{ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \}$$

3
$$A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \}$$

SECÇÃO 2 - DUALIDADE EM PROBLEMAS ESTÁTICOS DE TRANSPORTE.

Nesta secção, veremos alguns resultados em dualidade do (PT) (II-26) que permitirão interpretações úteis do conceito de fluxo dinâmico e servirão à análise das soluções dos problemas dinâmicos de transporte.

Dualidade em problemas estáticos de transporte tem sido bastante estudada em diversos trabalhos. Ford [3] sugere um algoritmo para resolução do (PT) com função custo linear, baseado em estudos do problema dual. Berge [1] faz o mesmo em relação ao (PT) com função custo convexa. Muitos outros algoritmos para a resolução do (PT), propostos na literatura, seguem a idéia de resolver os problemas dual e primal simultâneamente.

Nos problemas estáticos, abordados nos trabalhos citados acima, as restrições presentes são restrições de viabilidade do fluxo e conservação do fluxo nos nós. A dualização é realizada em relação a estas restrições.

Em nosso trabalho, em rêdes com fluxo dinâmico, interessa-nos explicitar vínculos de "conservação do fluxo nos ramos", no seguinte sentido: no problema "estático" o conjunto de pontos viáveis é formado pelos fluxos dinâmicos viáveis da rêde que em cada ramo tenham o fluxo entrante igual ao fluxo saliente. Métodos de resolução de problemas dinâmi

cos resultarão da dualização do problema estático associado em relação a essa restrição. A variável dual poderá, então, ser considerada como potencial ou uma tensão da rede. A formulação do problema dual que usaremos seguirá a abordagem de Geoffrion [2] (ver apêndice A, pág. A-4)

Consideremos a rede conexa (N, A) definida em (1) e seja M a sua matriz de incidência. Sejam $b, d \in \mathbb{R}^m$ tais que $0 \leq b \leq d$ e f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, funções reais estritamente convexas, contínuas e subdiferenciáveis em $[b_i, d_i]$ respectivamente. Adiante, no texto, comentaremos a necessidade dessas hipóteses.

Suporemos, ainda, que a rede acima é viável, i. é, o conjunto:

$$\Phi(b, d) = \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^m \mid M\varphi = 0, \varphi \in [b, d] \right\}$$

é não vazio. Com essas hipóteses, podemos concluir que o (PT) correspondente admitirá uma única solução $\bar{\varphi} \in \Phi(b, d)$. De fato, como $\Phi(b, d)$ é compacto e não vazio, a continuidade da função custo garante que seu ínfimo é atingido em $\Phi(b, d)$. Da convexidade estrita das funções custo resulta a unicidade da solução

Consideremos como problema primal o seguinte

4 Problema

5
$$\text{Min } \left\{ \sum_{i=1}^m f_i(x_i) + f_i(y_i) \mid (x, y) \in \Phi(b, d) \right\}$$

6 suj. a $y - x = 0$
 onde

$$7 \quad \Phi_D(b,d) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid M^T y = M^T x, \quad x,y \in [b,d] \right\}$$

No problema (4), $\Phi_D(b,d)$ é o conjunto de fluxos dinâmicos viáveis de (N,A) onde, para cada $(x,y) \in \Phi_D(b,d)$, x é o vetor de fluxos salientes e y o vetor de fluxos entrantes.

O problema (4) é equivalente a (PT). De fato, (\bar{x}, \bar{y}) é solução de (4) se e só se $\bar{\varphi} = \bar{x} = \bar{y}$ fôr solução de (PT). Em particular, o valor de (5) no ponto de ótimo é o dôbro do valor ótimo de (PT).

Dualização do Problema (4).

Consideremos agora, o problema dual de (4):

$$8 \quad \text{Max}_{u \in \mathbb{R}^m} \left\{ \text{Inf}_{(x,y) \in \Phi_D(b,d)} \sum_{i=1}^m f_i(x_i) + f_i(y_i) + u'(y-x) \right\}$$

Note-se que em (8) houve uma dualização do problema (4) sòmente em relação ao vínculo (6). Como o vínculo (6) é linear e as funções custo são subdiferenciáveis, o problema (4) é estável no sentido de Geoffrion [2]. Portanto, o problema dual (8) admite uma solução e os problemas (4) e (8) têm valores iguais (teorema de dualidade: apêndice A, pág. A-7).

Estudaremos, em seguida, o problema de infimização, que aparece entre chaves em (8). Fixado $u \in \mathbb{R}^m$ o problema

$$9 \quad \min_{(x,y) \in \Phi_D(b,d)} \sum_{i=1}^m f_i(x_i) + f_i(y_i) + u'(y-x)$$

admite sempre uma única solução. De fato, temos que

$$\emptyset \neq \Phi(b,d) \times \Phi(b,d) \subset \Phi_D(b,d)$$

e que $\Phi_D(b,d)$ é compacto; como a função critério de (9) é contínua e estritamente convexa (soma de uma função linear com uma função estritamente convexa) o mínimo de (9) é alcançado em um único ponto de $\Phi_D(b,d)$.

Separabilidade do Problema (9).

Devido à estrutura das matrizes de incidência, o problema (9) é separável em um sentido particular, que passaremos a analisar.

A única relação que acopla as diversas componentes de $(x,y) \in \Phi_D(b,d)$ é a equação:

$$10 \quad M^+ y = M^- x$$

Em particular, na equação

$$11 \quad M_j^+ y = M_j^- x \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

somente entram em jogo as componentes x_i e y_k tais que

os ramos α_i e α_k são respectivamente, emergentes e imergentes ao nó γ_j . De fato, (11) é a equação de conservação do fluxo dinâmico (x,y) no nó γ_j .

Além do mais, se α_i e α_k são ramos, respectivamente, emergente e imergente ao nó $\gamma_r \in N$ então as componentes x_i e y_k do fluxo dinâmico (x,y) somente aparecem na equação (11) com $j = r$.

Concluindo, o problema (9) é passível de separar-se em n subproblemas independentes em cada um dos quais entram em jogo somente os fluxos emergentes e imergentes de um dado nó. O subproblema j é da forma:

12 Problema (PD_j).

$$13 \quad \text{Min} \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^-(\gamma_j)} f_i(x_i) + u_i x_i + \sum_{\alpha_k \in \omega^+(\gamma_j)} f_k(y_k) + u_k y_k$$

$$14 \quad \text{suj. a} \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^-(\gamma_j)} x_i = \sum_{\alpha_k \in \omega^+(\gamma_j)} y_k$$

$$15 \quad b_i \leq x_i \leq d_i \quad \text{para} \quad \alpha_i \in \omega^-(\gamma_j)$$

$$16 \quad b_k \leq y_k \leq d_k \quad \text{para} \quad \alpha_k \in \omega^+(\gamma_j)$$

onde $\omega^-(\gamma_j)$ é o conjunto de ramos imergentes ao nó γ_j e $\omega^+(\gamma_j)$ o conjunto dos ramos emergentes de γ_j .

O (PD_j) admite sempre uma única solução por ser

um subproblema do problema (9). Além disso, os vetores (\bar{x}, \bar{y}) formados com as soluções dos (PDj), $j = 1, 2, \dots, n$ serão solução de (9) enquanto os valores de (9) e a soma dos valores dos (PDj) são iguais.

Observe-se, ainda, que para a resolução de cada (PDj) é necessário o conhecimento somente das componentes de u e das funções f_i , associadas aos ramos adjacentes ao nó δ_j .

Esses resultados levam-nos a concluir que o problema (9) pode ser resolvido com decisão descentralizada e informação parcial. As decisões de cada um dos n controladores ou centros de decisão são sobre as componentes dos fluxos nos ramos adjacentes a cada nó. A informação parcial restringe-se aos intervalos de viabilidade, funções custo e componentes do vetor u nos ramos adjacentes ao nó considerado.

É evidente que se o vetor u é uma solução do problema dual (8), a solução única do problema (9) é um fluxo estático ótimo para o (PT). Nesse caso, se as decisões dos controladores são tomadas a partir da resolução dos subproblemas (PDj) então tais decisões conduzirão ao estabelecimento de um fluxo estático ótimo na rede.

O vetor u é, portanto, de importância relevante. No capítulo V veremos que as soluções do (PDT2) (III- 45)

e do (PDT3) (III-53) podem ser reduzidas à resolução do (PDj). Haverá, contudo, em cada uma dessas soluções, interpretações distintas do vetor u .

As Soluções dos (PDj).

Interessa-nos, agora, caracterizar a solução de (PDj). De fato, existe uma relação direta entre a solução de (PDj) e os subgradientes das funções custo envolvidas. Essa relação será apresentada no lema (17), que enunciaremos em seguida.

16a Primeiramente, observemos que devido à convexidade estrita das funções custo, existe uma "função inversa" de cada subdiferencial ∂f_i (ver apêndice A, pág. A-3). Em outros termos, existem funções $h_i: \mathbb{R} \rightarrow [b_i, d_i]$, $i=1, 2, \dots, m$ crescentes, contínuas e sobrejetoras, satisfazendo:

$$(\forall \varphi_i \in [b_i, d_i]) (\forall s_i \in \partial f_i(\varphi_i))$$

$$h_i(s_i) = \varphi_i$$

As funções h_i são unívocamente determinadas pelas funções custo f_i .

A relação entre a solução de (PDj) e as funções h_i é apresentada no seguinte

17 Lema Suponhamos que as funções custo f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, são subdiferenciáveis, estritamente conve-

xas e contínuas e que $\Phi(b, d) \neq \emptyset$. O par $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ é solução de (PDj) com $u = \bar{u}$ se e só se (\bar{x}, \bar{y}) satisfaz, para algum $p_j \in \mathbb{R}$, as seguintes condições:

$$18 \quad h_i(-\bar{u}_i + p_j) = \bar{y}_i \quad \forall \alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)$$

$$19 \quad h_k(\bar{u}_k - p_j) = \bar{x}_k \quad \forall \alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)$$

$$20 \quad \sum_{\alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)} \bar{x}_k = \sum_{\alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)} \bar{y}_i$$

Prova: Primeiramente, mostremos que o sistema de equações (18), (19), e (20) sempre admite solução em x_k e y_i , para algum p_j .

Substituindo (18) e (19) em (20), obtemos:

$$21 \quad \sum_{\alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)} -h_k(\bar{u}_k - p_j) + \sum_{\alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)} h_i(-\bar{u}_i + p_j) = 0$$

Portanto, se existir p_j satisfazendo (21) então o sistema (18), (19), (20) admitirá uma solução em x_k e y_i .

Mas, a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$22 \quad h(p_j) = \sum_{\alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)} h_i(-\bar{u}_i + p_j) - \sum_{\alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)} h_k(\bar{u}_k - p_j)$$

é uma função crescente e contínua em p_j , pois as funções h_i são crescentes e contínuas. Como as funções h_i são crescentes e sobrejetoras, existem $\bar{p}_j, p_j^* \in \mathbb{R}$, $\bar{p}_j < p_j^*$, tais que

$$23 \quad h(\bar{p}_j) = \sum_{\alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)} b_i - \sum_{\alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)} d_k$$

$$24 \quad h(p_j^*) = \sum_{\alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)} d_i - \sum_{\alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)} b_k$$

Por hipótese, $\Phi(b, d)$ é não vazio. Então, pelo teorema de existência de fluxo viável (II-32) temos de (23) e (24) que

$$25 \quad h(\bar{p}_j) \leq 0$$

$$26 \quad h(p_j^*) \geq 0$$

Como h é uma função crescente e contínua, pelo teorema do valor médio e de (25), (26) concluímos que existe p_j , $\bar{p}_j \leq p_j \leq p_j^*$, satisfazendo

$$h(p_j) = 0$$

ou seja, satisfazendo (21). Logo, o sistema (18), (19), (20) admite uma solução.

Basta mostrarmos, agora, que toda solução do sistema de equações (18) - (20) é solução de (PD_j). De fato,

nesse caso, podemos concluir que a solução de (PDj) será so lução de (18) - (20), pois êste sistema de equações sempre admite solução.

Seja (\bar{x}, \bar{y}) solução do sistema (18) - (20). Então, devido à definição dos h_i e a (20), temos que (\bar{x}, \bar{y}) é viá vel para (PDj). Ainda da definição dos h_i e de (18), (19), deduz-se a existência de $p_j \in \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$27 \quad -\bar{u}_i + p_j \in \partial f_i(\bar{y}_i) \quad \forall \alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)$$

$$28 \quad \bar{u}_k - p_j \in \partial f_k(\bar{x}_k) \quad \forall \alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)$$

ou ainda:

$$29 \quad p_j \in \partial f_i(\bar{y}_i) + \bar{u}_i \quad \forall \alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)$$

$$30 \quad -p_j \in \partial f_k(\bar{x}_k) - \bar{u}_k \quad \forall \alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)$$

Denotemos por

$$F_j^+(y) = \sum_{\alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)} f_i(y_i) + u_i y_i$$

e por

$$F_j^-(x) = \sum_{\alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)} f_k(x_k) + u_k x_k$$

Então, da definição de subgradiente e de (29) e (30) podemos escrever que, em particular:

$$\begin{aligned}
 & \left(\forall x, y \in [b, d], \sum_{\alpha_i \in \omega^+(x_j)} y_i = \sum_{\alpha_k \in \omega^-(x_j)} x_k \right) \\
 31 \quad & F_j^+(y) + F_j^-(x) \geq F_j^+(\bar{y}) + F_j^-(\bar{x}) + p_j \sum_{\alpha_i \in \omega^+(x_j)} (y_i - \bar{y}_i) + \\
 & + p_j \sum_{\alpha_k \in \omega^-(x_j)} (\bar{x}_k - x_k)
 \end{aligned}$$

Mas, como (\bar{x}, \bar{y}) e (x, y) em (31) são viáveis para (PDj), temos que

$$32 \quad p_j \left(\sum_{\alpha_i \in \omega^+(x_j)} y_i - \sum_{\alpha_k \in \omega^-(x_j)} x_k \right) = p_j \left(\sum_{\alpha_i \in \omega^+(x_j)} \bar{y}_i - \sum_{\alpha_k \in \omega^-(x_j)} \bar{x}_k \right) = 0$$

Substituindo (32) em (31), concluímos que

$$F_j^+(y) + F_j^-(x) \geq F_j^+(\bar{y}) + F_j^-(\bar{x})$$

e portanto (\bar{x}, \bar{y}) é solução de (PDj). ◁

A caracterização das soluções de (PDj) apresentada no lema (17) é bastante poderosa para a resolução deste problema. De fato, a solução de (PDj) será formada pelos \bar{x}_k e \bar{y}_i dados em (18) e (19), onde p_j é uma solução qualquer da equação (21). Reduz-se assim, a resolução de (PDj) ao cálculo de um zero de uma função crescente.

Além disso, o lema (17) terá importância teórica

no desenvolvimento das soluções de (PDT2) e (PDT3), no capítulo V.

33 Consideremos, agora, a função $D: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ que a cada $u^* \in \mathbb{R}^m$ associa $D(u^*) = y^* - x^*$, onde (x^*, y^*) é solução do problema (9) com $u = u^*$. Como (x^*, y^*) é um fluxo dinâmico viável para (N, A) , devido à dinâmica da rede, o vetor $D(u^*) = y^* - x^*$ será a derivada do excedente provocada pelo fluxo (x^*, y^*) em (N, A) (ver III- 17).

A função D definida em (33) será relevante no estabelecimento da solução de (PDT2). Interessa-nos, portanto, caracterizá-la em termos dos subgradientes das funções custo.

Fixado $u^* \in \mathbb{R}^m$, seja $p^* \in \mathbb{R}^m$ o vetor formado pelos p_j^* solução da equação (21) com $u = u^*$. Seja $\alpha_i = (\gamma_j, \gamma_k)$ um ramo qualquer de A . Então, temos que a i -ésima componente de $D(u^*)$ é dada por:

$$34 \quad D_i(u^*) = y_i^* - x_i^*$$

Da definição de α_i temos que $\alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)$ e $\alpha_i \in \omega^-(\gamma_k)$. Portanto, y_i^* é computado no problema (PDj) e x_i^* é computado no problema (PDk). Aplicando o lema (17), concluímos que x_i^* e y_i^* são dados por:

$$35 \quad x_i^* = h_i(+u_i^* - p_k^*)$$

$$36 \quad y_i^* = h_i(-u_i^* + p_j^*)$$

De (34), (35) e (36), concluimos, pois, que

$$37 \quad D_i(u^*) = h_i(-u_i^* + p_j^*) - h_i(+u_i^* + p_k^*)$$

onde $\alpha_i = (\gamma_j, \gamma_k) \in A$ e p_j^*, p_k^* são reais quaisquer, satisfazendo:

$$38 \quad \sum_{\alpha_s \in \omega^+(\gamma_j)} h_s(-u_s^* + p_j^*) = \sum_{\alpha_r \in \omega^-(\gamma_j)} h_r(+u_r^* + p_j^*)$$

$$39 \quad \sum_{\alpha_s \in \omega^+(\gamma_k)} h_s(-u_s^* + p_k^*) = \sum_{\alpha_r \in \omega^-(\gamma_k)} h_r(+u_r^* + p_k^*)$$

No capítulo V mostraremos que a função D é lipchitziana utilizando o resultado acima.

As Soluções do Problema Dual (8).

Apresentaremos, em seguida, uma caracterização do conjunto de soluções do problema dual (8) a partir da função D .

Seja Ω o conjunto definido por:

$$40 \quad \Omega \triangleq \left\{ u \in \mathbb{R}^m \mid D(u) = 0 \right\}$$

O lema que se segue estabelece a identidade entre Ω e o conjunto de soluções do problema dual (8).

41 Lema: O vetor $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ é solução do problema dual (8) se e só se $\bar{u} \in \Omega$.

Prova: Se $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ é solução de (8), como o problema de infimização (9) admite uma única solução, então, esta será solução do problema primal (4). Portanto, a solução de (9) com $u = \bar{u}$ será um fluxo estático. Logo, $D(\bar{u}) = 0$, ou seja, $\bar{u} \in \Omega$.

Suponhamos, agora, que $\bar{u} \in \Omega$ e que $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Phi_D(b, d)$ é a correspondente solução do problema (9). Se (\bar{x}, \bar{y}) é solução de (9), será, em particular, solução de (9) com a restrição adicional

$$42 \quad y - x = \bar{y} - \bar{x}$$

Portanto, (\bar{x}, \bar{y}) será solução do problema:

$$43 \quad \begin{aligned} & \text{Min}_{(x, y) \in \Phi_D(b, d)} \sum_{i=1}^m f_i(x_i) + f_i(y_i) + \bar{u}'(y - x) \\ & \text{suj. a } y - x = 0 \end{aligned}$$

pois

$$\bar{y} - \bar{x} = D(\bar{u}) = 0$$

Mas, (43) é equivalente ao problema primal (4) tendo, portanto, valor igual ao problema dual (8). Logo, \bar{u} é solução de (8). \triangleleft

Do lema (41) conclui-se que se $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ é tal

que as soluções dos subproblemas (PDj) geram um fluxo estático na rede, então o fluxo resultante é o fluxo ótimo para o (PT).

44 Uma conclusão importante que obtemos do lema (41) é que Ω é não vazio. De fato, como o problema primal (4) é estável, o problema dual admite pelo menos uma solução. Esse resultado é essencial na prova da estabilidade da solução do (PDT2), que propomos no capítulo V.

SECÇÃO 3 - CONCLUSÃO

A dualização de (PT) desenvolvida neste capítulo, representa uma ferramenta poderosa para a análise de problemas dinâmicos de transporte devido à estrutura do problema de infimização (9). Os subproblemas (PDj) resultantes da separação do problema (9) têm por principal característica a estrutura dos conjuntos de dados necessários à sua resolução: o conjunto de informações paramétricas de um controlador no (PDT2) ou (PDT3).

Os resultados em dualidade, obtidos neste capítulo, partiram da hipótese de que as funções custo são subdiferenciáveis e que o (PT) admite uma única solução. Contudo, a hipótese de subdiferenciabilidade é usada apenas para garantir estabilidade do (PT). O lema (17), inclusive, pode

ser provado a partir do teorema de otimalidade (II-36), ou ainda, a partir da estabilidade de (PT), ao invés da subdiferenciabilidade das funções custo.

O lema (17) terá importância fundamental na definição das políticas soluções do (PDT2) e (PDT3). O sistema resultante da aplicação da política de controle solução do (PDT2) será um sistema dinâmico. A função D , definida em (33) será utilizada para a descrição da equação de estado deste sistema. O conjunto Ω definido em (40) está relacionado ao conjunto de pontos de equilíbrio do sistema dinâmico.

C A P Í T U L O V

SOLUÇÃO DO (PDT2) E (PDT3)

SECÇÃO 1 - INTRODUÇÃO

Os resultados em dualidade do (PT) vistos no capítulo anterior são promissores para a resolução do (PDT2) e (PDT3). De fato, baseamos as soluções daqueles problemas dinâmicos nas conclusões obtidas da dualização de (PT).

Se compararmos os enunciados de (PDT2) e (PDT3) podemos verificar que toda solução de (PDT2) é uma solução de (PDT3). Contudo, a informação adicional, existente no (PDT3) entre controladores adjacentes induz-nos a procurar políticas de controle solução dêste problema que independam do excedente. Veremos que isto é impossível na formulação de (PDT3) que apresentamos.

Fixar-nos-emos na resolução completa de (PDT2) de finindo políticas de contrôles utilizando o lema (IV-17). A otimalidade no regime da solução será consequência de propriedades da função D e do conjunto Ω definidos no capítulo anterior.

Para podermos utilizar os resultados de dualidade desenvolvidos no capítulo precedente, assumiremos as hipóteses feitas, ou seja, as funções custo são estritamente convexas, contínuas e subdiferenciáveis e o conjunto de fluxos viáveis é não vazio. Na solução do (PDT2) imporemos uma hipótese adicional sobre as funções custo para podermos provar a estabilidade assintótica.

SECÇÃO 2 - SOLUÇÃO DE (PDT3)

Mostraremos inicialmente que as políticas de informação em (PDT3) não podem ser completamente independentes do excedente instantâneo.

Suponhamos que seja dada uma solução de (PDT3). A política de informação da solução em um dado nó $\gamma_j \in \mathcal{N}$, associa às informações instantâneas de $q^j(t)$ e $p^j(t)$ a informação $p_j(t)$ do controlador j . Então, o conjunto das políticas de informação define uma função E que a cada excedente $q \in [0, \ell]$ e a cada vetor de informação $p \in \mathbb{R}^n$

associa o vetor de informação p , ou seja:

$$(\forall q \in [0, \ell]) \quad (\forall p \in \mathbb{R}^n)$$

$$1 \quad p = E(q, p)$$

Fixado $q \in [0, \ell]$ em (1), vemos que as componentes do vetor p dependem das componentes do próprio p . Para que em (1) uma componente p_j não dependa do próprio p_j , o que não teria sentido, devemos ter alguma componente p_k de p dependente apenas de q . Conclui-se, portanto, que tôdas as componentes de p dependentes de p_k são dependentes de q .

Mostramos, portanto, que p depende do excedente e como os contrôles são funções de p e q concluimos que o contrôle em (PDT3) não pode independender do excedente instantâneo.

2 A impossibilidade das políticas de contrôle solução de (PDT3) independenderem do excedente instantâneo é inerente ao próprio enunciado de (PDT3). Uma maneira de contornarmos essa restrição seria, por exemplo, reenunciarmos o (PDT3), sem alterar a estrutura de informação, de forma a permitir uma discretização no tempo.

Com a discretização, o vetor de informação $p(t)$

só poderia ser alterado nos instantes $t = k \Delta t, \Delta t > 0, k \in \mathbb{N}$. Nesse caso, o vetor de informação em um instante $k \Delta t$ seria função do vetor de informação em $(k-1) \Delta t$. Essa abordagem não será realizada neste trabalho.

Uma ferramenta útil na análise de soluções para (PDT3) está na simulação analógica do (PT) apresentada na secção 3 do capítulo II. Vimos ali que a partir do (PT) podemos construir um circuito elétrico, com a mesma topologia de (N,A) , composto de dispositivos controlados por tensão, tendo como vetor corrente solução um fluxo ótimo de (PT). No circuito elétrico, o potencial de um dado nó e as correntes nos dispositivos com um terminal neste nó dependem exclusivamente desses dispositivos e dos potenciais dos nós adjacentes. Portanto, os potenciais nos nós adjacentes a cada nó são informações relevantes para o estabelecimento de um fluxo ótimo.

Para a implementação dos dispositivos com um terminal em um dado nó do circuito, necessitamos apenas do conhecimento das funções custo nos ramos adjacentes ao nó da rede associado àquele nó do circuito. Como essas funções custo fazem parte do espaço de informações do controlador desse nó, o controlador do nó pode implementar essa parte da simulação analógica.

Do conjunto de resultados acima, podemos chegar à seguinte conclusão: se o controlador de um nó recebe a informação dos potenciais ótimos dos nós adjacentes na simulação, então êsse controlador poderá determinar um potencial ótimo para o seu nó e os fluxos ótimos nos ramos adjacentes ao seu nó. Êste resultado será formalizado através do teorema (3) a seguir e fornecerá uma "solução prática" para (PDT3).

As conclusões relativas à simulação analógica são válidas desde que as hipóteses de convexidade estrita das funções custo e existência de um fluxo estático viável sejam satisfeitas. O teorema que apresentamos adiante, assume, além das hipóteses acima, que as funções custo são contínuas e subdiferenciáveis. A prova do teorema faz uso do lema (IV-17) e do teorema de otimalidade (II-36).

3 Teorema: Suponhamos que sejam válidas as hipóteses acima e que a informação que cada controlador j fornece aos controladores adjacentes, a partir das informações instantâneas p^j e q^j , é um real p_j qualquer satisfazendo:

$$4 \quad \sum_{\alpha_i = (\gamma_j - \gamma_s) \in \omega^+(\gamma_j)} h_i(-p_s + p_j) - \sum_{\alpha_k = (\gamma_r, \gamma_j) \in \omega^-(\gamma_j)} h_k(p_r - p_j) = 0$$

Então, o fluxo dinâmico gerado pelos controles (x^j, y^j)
 $j = 1, 2, \dots, n$, dados por:

$$5 \quad x_k^j = h_k(p_r - p_j) \quad \forall k \text{ tal que } \alpha_k \in (\gamma_r, \gamma_j) \in$$

$$6 \quad x_k^j = 0 \quad \forall k \text{ tal que } \alpha_k \notin \omega^-(\gamma_j)$$

$$7 \quad y_i^j = h_i(-p_s - p_j) \quad \forall i \text{ tal que } \alpha_i = (\gamma_j, \gamma_s)$$

$$8 \quad y_i^j = 0 \quad \forall i \text{ tal que } \alpha_i \notin \omega^+(\gamma_j)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

é um fluxo estático ótimo para (PT).

Prova: Mostremos inicialmente que a equação (4) admite solução em p_j . Substituindo os x_k^j e y_i^j , dados em (5) e (7), na equação (4), obtemos:

$$9 \quad \sum_{\alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)} x_k^j = \sum_{\alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)} y_i^j$$

Mas, através do lema (IV-17), concluímos que o sistema de equações (5), (7) e (9) admite solução nos x_k^j , y_i^j e p_j . Logo, existe p_j satisfazendo (3). Devemos mostrar agora que o fluxo dinâmico gerado pelos controles (x^j, y^j) , $j = 1, 2, \dots, n$, é um fluxo ótimo para (PT).

Primeiramente, observemos que os controles satisfazem a equação de conservação do fluxo nos nós da rede. De

fato, as equações (4) - (8) implicam em (9), ou seja, a equação de conservação do fluxo em

$$10 \quad M_j^+ y^j = M_j^- x^j$$

é satisfeita.

Além disso, por definição das funções h_i , $i = 1, 2, \dots, m$, temos que

$$b_k \leq x_k^j \leq d_k \quad \alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)$$

$$b_i \leq y_i^j \leq d_i \quad \alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)$$

Portanto, os vetores

$$11 \quad \varphi^1 = \sum_{j=1}^n x^j \in \mathbb{R}^m$$

$$12 \quad \varphi^2 = \sum_{j=1}^n y^j \in \mathbb{R}^m$$

são tais que (φ^1, φ^2) é um fluxo dinâmico viável para (N, A) . (confronte com (III-26) e (III-27)).

Mostraremos, agora, que (φ^1, φ^2) é um fluxo estático. Seja $\alpha_i = (\gamma_j, \gamma_k)$ um ramo qualquer de A . Temos que o fluxo saliente de α_i é dado por:

$$13 \quad x_i^k = h_i(p_j - p_k)$$

enquanto o fluxo entrante no ramo α_i é dado por:

$$14 \quad y_i^j = h_i(-p_k + p_j)$$

Portanto, de (13) e (14), concluímos que:

$$y_i^j = x_i^k$$

isto é, para todo ramo, o fluxo entrante é igual ao fluxo saliente. Logo,

$$\varphi^1 = \varphi^2$$

e (φ^1, φ^2) é um fluxo estático viável.

Resta-nos mostrar que φ^1 é um fluxo ótimo para (PT). Em vista da definição de φ^1 , temos que se

$$\alpha_i = (\gamma_j, \gamma_k) \text{ então:}$$

$$15 \quad \varphi_i^1 = x_i^j = h_i(p_j - p_k)$$

Da definição das funções h_i , $i = 1, 2, \dots, m$ e de (15), concluimos que:

$$16 \quad p_j - p_k \in \partial f_i(\varphi_i^1)$$

Seja $\theta \in \mathbb{R}^m$ dado por:

$$17 \quad \theta = Mp$$

onde $p \in \mathbb{R}^n$ é o vetor formado pelos potenciais p_j . Então, θ é uma tensão para a rede (N, A) .

Se $\alpha_i = (\gamma_j, \gamma_k)$ então de (17) concluímos que

$$18 \quad \theta_i = \sum_{s=1}^n M_{si} p_s = p_j - p_k$$

De (16) e (18) resulta que se $\alpha_i = (\gamma_j, \gamma_k)$ então:

$$19 \quad \theta_i = \partial f_i(\varphi_i^t)$$

A tensão θ é, portanto, subgradiente da função custo no fluxo φ^t . Aplicando o teorema de otimalidade (II-36) podemos concluir que o vetor φ^t é o fluxo estático viável ótimo para o (PT). \triangleleft

O teorema (3) fornece uma condição suficiente para que os contrôles, em (PDT3) com informação de potenciais, gerem um fluxo ótimo. Ou seja, se em dado instante a informação p_j de cada controlador j satisfaz (4), então os contrôles dados pelas equações (5) - (8) geram um fluxo ótimo na rede.

O conjunto das equações (4) forma um sistema de equações algébricas dependente apenas das funções custo. Um conjunto de potenciais que resolva este sistema de equações é um conjunto de potenciais ótimos para a simulação analógica do (PT).

Como o sistema de equações citado acima independe

do excedente q , resulta, da análise feita sôbre as políticas de informação, que é impossível construirmos políticas de informação solução de (PDT3) baseados em (4). Contudo, como tôda solução do sistema de equações algébricas (4) é um vetor potencial ótimo na simulação analógica, as idéias envolvidas no teorema (3) permitem darmos uma solução prática para (PDT3).

Cada controlador j em (PDT3) pode construir uma parte da simulação cujas características tensão x corrente satisfazem a equação (4). Dessa forma, cada controlador toma decisões simulando parte do circuito elétrico; o conjunto de controladores simula todo o circuito elétrico. Se a simulação de (PT) fôr estável, então os controladores estabelecem fluxos ótimos na rêde em tempo praticamente nulo.

Evidentemente, esta "solução prática" não é uma solução para (PDT3), pois a simulação analógica de (PT), apesar de conter sômente dispositivos resistivos, é um sistema dinâmico devido a capacitâncias parasíticas.

Uma possibilidade de resolução de (PDT3) seria dada pela utilização das idéias de discretização no tempo, já expostas. Poder-se-ia construir algoritmos discretos para a resolução do sistema de equações algébricas (4), usando como regra de parada o teorema (3). Na construção de tais

algoritmos, o lema (IV-17) parece ser importante.

Uma resolução dêste tipo deverá garantir aos algoritmos uma convergência suficientemente rápida, para que o excedente não viole seu intervalo de viabilidade. As idéias propostas acima não serão desenvolvidas neste trabalho.

SECÇÃO 3 - SOLUÇÃO DE (PDT2)

A base de solução do (PDT2) está no estudo de dualidade do (PT) e na separabilidade do problema de infimização (IV-9). No capítulo IV vimos que o problema (IV-9) podia ser resolvido pela resolução de n subproblemas (PD j) (IV-12), independentes, que envolviam somente as "variáveis locais" de cada nó. A solução do (PDT2) será tal que o contrôle de cada nó γ_j é a solução do (PD j) tomando como variável dual u uma conveniente função do excedente instantâneo.

Suponhamos, a princípio, que não haja limite para o excedente instantâneo $q(t) \in \mathbb{R}^m$ e ainda que $q(t)$ possa ter componentes negativas. A política de contrôle de cada controlador j consistirá em estabelecer os fluxos dados pelo teorema (3), assumindo que o excedente nos ramos adjacentes a γ_j é numèricamente igual aos potenciais ótimos daquele teorema nos nós adjacentes a γ_j .

O procedimento acima equivale a cada controlador fazer uma estimativa de p^j (vetor potencial dos nós adjacentes a γ_j) através de q^j e definir seu contrôle a partir dessa estimativa. Se a estimativa feita por algum controlador não é verdadeira, então, em geral, o fluxo dinâmico gerado pelos contrôles, não será um fluxo estático, embora se mantenha viável. Como consequência da dinâmica da

rêde, o excedente deverá modificar-se.

A modificação do excedente provocará uma mudança de estimativas dos controladores que produzirá uma correção do contrôle. Veremos que atuando dessa forma, os controladores fazem com que a derivada do excedente tenda, no regime, a zero. Igualmente, o fluxo dinâmico induzido pelos controlôes tenderá a um fluxo estático. Mostraremos que o fluxo estático de regime é ótimo para o problema estático associado.

Com o procedimento descrito acima, não podemos garantir, porém, que o excedente q se mantenha dentro de seu intervalo de viabilidade, ao longo do tempo. Para que a viabilidade do excedente não seja violada, será necessária a introdução de funções penalidade.

As funções penalidade, denotadas g_i , $i = 1, 2, \dots, m$, serão definidas nos intervalos $(0, \ell_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, respectivamente, assumindo valores sôbre \mathbb{R} . As funções g_i serão não decrescentes, contínuas e bijetoras. Portanto, as funções penalidade podem assumir quaisquer valores reais; tendem a $+\infty$ quando o excedente se aproxima do seu limite, e tendem a $-\infty$ quando o excedente se aproxima de zero.

Com a introdução das funções penalidade, as estimativas dos controladores serão realizadas a partir de

$g_1(q_1), g_2(q_2), \dots, g_m(q_m)$ ao invés das componentes do excedente q . Com êsse artifício, as estimativas podem assumir quaisquer valores reais sem que o excedente q viole o intervalo $(0, \ell)$. Formalizemos essas idéias.

21 Sejam G_1, G_2, \dots, G_m , m funções reais estritamente convexas definidas em $(0, \ell_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, respectivamente. Cada função G_i deve ser continuamente diferenciável em $(0, \ell_i)$ e satisfazer a:

$$\begin{aligned} 22 \quad & \lim_{x \rightarrow \ell_i} G_i(x) = +\infty \\ & x \in (0, \ell_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} G_i(x) = +\infty \\ & x \in (0, \ell_i) \end{aligned}$$

Consideremos as funções reais g_1, g_2, \dots, g_m , definidas em $(0, \ell_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, respectivamente, e dadas por:

$$24 \quad g_i(x) = \frac{d G_i(x)}{dx} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Como G_i é continuamente diferenciável em $(0, \ell_i)$, a função g_i é contínua em $(0, \ell_i)$. Como G_i é estritamente convexa, e satisfaz (22) e (23), então g_i é crescente, bijetora e com limites:

$$25 \quad \lim_{x \rightarrow \ell_i} g_i(x) = +\infty$$

$$x \in (0, \ell_i)$$

$$26 \quad \lim_{x \rightarrow 0} g_i(x) = -\infty$$

$$x \in (0, \ell_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Denotemos por g a função $g: (0, \ell) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$27 \quad (\forall q \in (0, \ell)) \quad g(q) \triangleq \begin{bmatrix} g_1(q_1) \\ g_2(q_2) \\ \vdots \\ g_m(q_m) \end{bmatrix}$$

Para que possamos adotar o procedimento esboçado para a solução do (PDT2), necessitaremos das hipóteses básicas:

28 Hipóteses: As funções custo f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, são estritamente convexas, contínuas e subdiferenciáveis e o conjunto de fluxos estáticos viáveis $\Phi(b, d)$ é não vazio.

As hipóteses (28) são utilizadas para garantirmos a existência e unicidade de solução do (PT) e a estabilidade deste problema. Com os elementos acima definidos, construímos a política de controle.

29 Política de Controle.

Seja $\gamma_j \in N$ um nó e sejam $b^j, d^j, F^j, e^j, q^j(0)$ os elementos do espaço de informações paramétricas de γ_j . O valor da política de controle $H_j(b^j, d^j, F^j, e^j, q^j(0))$ em um ponto $q^j \in (0, e^j)$ será o único par de vetores $(\bar{x}^j, \bar{y}^j) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ que é solução do (PDj) (IV-12) com $u = g(q)$, e satisfaz:

$$30 \quad \left[\begin{array}{ll} \bar{x}_k^j = 0 & \alpha_k \notin \omega^-(\gamma_j) \\ \bar{y}_i^j = 0 & \alpha_i \notin \omega^+(\gamma_j) \end{array} \right.$$

A política de controle acima está bem definida, pois o (PDj) admite uma única solução para as componentes envolvidas. As equações (30) fixam os valores das demais componentes.

Uma maneira de computar o valor da política de controle em um ponto é através dos resultados do lema (IV-17). Nesse caso, a resolução do problema de minimização (PDj) é transformado no cálculo de um zero de uma equação. Observe-se que a política de controle (29) é idêntica à política de controle (2) solução do (PDT3), com uma interpretação distinta das componentes do vetor u .

Se cada controlador j resolve o (PDj) tomando $u = g(q)$ então, devido à separabilidade do problema (IV-9) nos (PDj), os controladores resolvem o problema (IV-9). O

resultado da aplicação da política de controle (29), por to dos os controladores, será o estabelecimento, na rede, de um fluxo dinâmico $(\varphi^1, \varphi^2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ solução única do problema (IV-9). É evidente que o fluxo (φ^1, φ^2) está relacionado aos controles por:

$$31 \quad \varphi^1 = \sum_{j=1}^m \bar{x}^j$$

$$32 \quad \varphi^2 = \sum_{j=1}^n y^j$$

(confronte com (IV-26) e (IV-28)).

Se (φ^1, φ^2) é solução do problema (IV-29), então (φ^1, φ^2) é um fluxo dinâmico viável para (N, A) . Portanto, as condições de viabilidade e conservação do fluxo (III-26) - (III-29) do enunciado do (PDT2) são satisfeitas pela política (29). Propomo-nos, agora, a determinar a equação de estado (excedente q) do sistema, com a política de controle (29).

Equação de Estado do Sistema com a Política (29).

Seja $q(t) \in (0, \ell)$ o excedente da rede em certo instante $t \geq 0$. Seja $(\varphi^1(q(t)), \varphi^2(q(t)))$ o fluxo dinâmico gerado pela política (29) devido ao excedente $q(t)$. Então, a dinâmica da rede (III-18) impõe uma derivada do excedente,

dada por:

$$33 \quad \frac{dq(t)}{dt} = \varphi^2(q(t)) - \varphi^1(q(t))$$

A equação (33) é a equação de estado do sistema com a política de controle (29). Contudo, existe uma forma mais conveniente para (33).

Como $(\varphi^1(q(t)), \varphi^2(q(t)))$ é solução do problema (IV-9) com $u = g(q(t))$, então o membro direito de (33) é o valor da função D , definida em (IV-33), no ponto $u = g(q(t))$. Por intermédio da função D , a equação de estado (33) pode ser reescrita:

$$34 \quad \frac{dq(t)}{dt} = D(g(q(t)))$$

A partir da equação de estado (34) do sistema, podemos determinar o conjunto de

Pontos de Equilíbrio do Sistema (34).

Um excedente $\bar{q} \in (0, \ell)$ é um ponto de equilíbrio do sistema (34) se e só se

$$35 \quad D(g(\bar{q})) = 0$$

Seja Ω_q o conjunto de pontos de equilíbrio de (34). O conjunto Ω_q pode ser descrito por

$$36 \quad \Omega_q = \left\{ q \in (0, \ell) \mid D(g(q)) = 0 \right\}$$

De (36) deduz-se facilmente que Ω_q é a imagem inversa, através de g , do conjunto Ω de zeros da função D , definido em (IV-40). Ou seja, Ω_q é o conjunto

$$37 \quad \Omega_q = \left\{ q \in (0, \ell) \mid g(q) \in \Omega \right\}$$

O lema que se segue estabelece a não vacuidade de Ω_q e a otimalidade do controle, gerado pela política (29), nos pontos de equilíbrio do sistema (34).

38 Lema: O conjunto Ω_q é não vazio. Se $\bar{q} \in \Omega_q$ então o fluxo dinâmico $(\varphi^1(\bar{q}), \varphi^2(\bar{q}))$ gerado pela política (29), é um fluxo estático ótimo para o problema estático as sociado.

Prova: Do lema (IV-41) tem-se que Ω é o conjunto de so luções do problema dual (IV-8). Como o conjunto Ω é não vazio (ver (IV-44)), resulta, do fato de g ser bijetora, que Ω_q , definido em (37), é não vazio.

Se $\bar{q} \in \Omega_q$ então, de (37), temos que $g(\bar{q}) \in \Omega$. Da definição (IV-40) de Ω resulta que $D(g(\bar{q})) = 0$, ou se ja, o fluxo dinâmico $(\varphi^1(\bar{q}), \varphi^2(\bar{q}))$, solução do problema (IV-9) com $u = g(\bar{q})$, satisfaz

$$39 \quad \varphi^1(\bar{q}) = \varphi^2(\bar{q})$$

Do fato de $g(\bar{q})$ ser solução ótima do problema dual (IV-9) e de (39) resulta que $\varphi^1(\bar{q})$ é solução do problema primal (IV-4). \triangleleft

O lema (38) caracteriza, portanto, a existência de pontos de equilíbrio e a otimalidade do controle nesses pontos. Resta-nos provar, agora, que a equação diferencial (34) admite uma única solução, passando por qualquer ponto $q^0 \in (0, \ell)$ e em seguida, provar que para qualquer estado inicial viável a solução de (34) tende assintoticamente a um ponto de Ω_q .

Existência e Unicidade de Soluções de (34).

Para estudarmos a estabilidade assintótica do sistema (34), precisamos garantir que este sistema admite uma e somente uma solução passando por cada ponto $q^0 \in (0, \ell)$. O teorema de Lipchitz, de existência e unicidade de soluções de sistemas de equações diferenciais, estabelece condições suficientes para soluções locais passando por pontos de uma região fixada.

Provaremos, em seguida, que a função $D.g$ é lipchitziana em qualquer compacto de $(0, \ell)$, assumindo algumas hipóteses. A partir disso, poderemos afirmar que, para todo compacto K de $(0, \ell)$ e para todo ponto $q^0 \in (0, \ell)$,

existe uma solução única de (34), $q(q^0, t) \in K$, em um intervalo $0 \leq t \leq a$, $a > 0$. Esse resultado permitirá concluir mais adiante, no teorema (63), que o sistema (34) admite uma única solução $q(q^0, t)$ para todo $t \geq 0$, passando pelo ponto $q^0 \in (0, \ell)$.

As hipóteses que faremos para provar que D.g é lipchitziana nos compactos de $(0, \ell)$ são:

40 Hipóteses:

a) A função g_i é lipchitziana em qualquer compacto de $(0, \ell)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$

b) A subdiferencial ∂f_i de f_i é "crescente com inclinação maior que $k_i > 0$ ", em $[b_i, d_i]$, isto é,

$$(\forall \varphi_i^1, \varphi_i^2 \in [b_i, d_i]) (\forall \lambda_i^1 \in \partial f_i(\varphi_i^1)) (\forall \lambda_i^2 \in \partial f_i(\varphi_i^2)) \\ |\lambda_i^1 - \lambda_i^2| > k_i |\varphi_i^1 - \varphi_i^2| \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

A condição a) em (40) não importa em nenhuma restrição da solução que apresentamos para o (PDT2), pois as funções g_i são construídas independentemente do problema. Se as funções g_i são diferenciáveis, a condição a) equivale a derivada de g_i ser limitada em qualquer compacto de $(0, \ell_i)$.

A condição b) é uma condição suficiente para garantirmos que a função D é lipchitziana. Note-se que b) em (40) implica em que as funções h_i são lipchitzianas. Uma interpretação da condição b) é que os dispositivos elétricos da simulação analógica do (PT) (II-26) têm "resistências dinâmicas" maiores que k_i , $i = 1, 2, \dots, m$, respectivamente.

Em virtude da condição a) de (40), a prova de que $D.g$ satisfaz a condição de Lipchitz, em qualquer compacto de $(0, \ell)$, fica restrita à prova de que D é lipchitziana. A prova do lema que se segue utiliza a formulação da função D em termos das funções h_i , apresentado em (IV-37) - (IV-39).

41 Lema: Suponhamos que a condição b) de (40) é satisfeita. Então, a função D satisfaz a condição de Lipchitz em todo o \mathbb{R}^m , ou seja,

$$(\exists L \in \mathbb{R}) \quad (\forall u^1, u^2 \in \mathbb{R}^m)$$

$$42 \quad |D_i(u^1) - D_i(u^2)| \leq L \|u^1 - u^2\|$$

Prova: Seja $k = \min k_1, k_2, \dots, k_m$ onde k_i , $i = 1, 2, \dots, m$, são as constantes que aparecem em (40) b). Então, os mapeamentos inversos das subdiferenciais, h_i , $i = 1, 2, \dots, m$, são lipchitzianas com constante $1/k$, isto é,

$$(\forall \theta^1, \theta^2 \in \mathbb{R}^m)$$

$$43 \quad |h_i(\theta^1) - h_i(\theta^2)| \leq \frac{1}{k} |\theta^1_i - \theta^2_i|$$

Mostraremos que D é lipchitziana a partir da formulação de D dada em (IV-37) - (IV-39).

Dado o ramo $\alpha_i \in (\gamma_j, \gamma_k) \in A$ temos que

$$44 \quad (\forall u^* \in \mathbb{R}^m) \quad D_i(u^*) = h_i(u_i^* + p_j^*) - h_i(u_i^* + p_k^*)$$

onde p_j^* e p_k^* são reais satisfazendo (IV-38) e (IV-39) respectivamente. Provaremos que D_i é lipchitziana mostrando que cada um dos termos à direita de (44) satisfazem a condição de Lipchitz. Mostremos, inicialmente, que:

$$(\forall u^1, u^2 \in \mathbb{R}^m)$$

$$45 \quad \left| h_i(u_i^1 + p_j^1) - h_i(u_i^2 + p_j^2) \right| \leq \frac{2}{k} \quad \|u^1 - u^2\|_T$$

onde p_j^1 e p_j^2 satisfazem (IV-38) com $u^* = u^1$ e $u^* = u^2$, respectivamente, e $\|\cdot\|_T$ indica a norma do máximo.

Suponhamos, por absurdo, que existam $u^1, u^2 \in \mathbb{R}^m$ que não satisfaçam (45). Então, de (45) vem:

$$46 \quad \left| h_i(u_i^1 + p_j^1) - h_i(u_i^2 + p_j^2) \right| > \frac{2}{k} \quad \|u^1 - u^2\|_T$$

Substituindo em (43), θ_i^k por $u_i^k - p_j^k$, $k = 1, 2$, e reagrupando termos, obtém-se

$$47 \quad \frac{1}{k} (|u_i^1 - u_i^2| + |p_j^1 - p_j^2|) \geq \left| h_i(u_i^1 + p_j^1) - h_i(u_i^2 + p_j^2) \right|$$

De (46) e (47) resulta que:

$$48 \quad \frac{1}{k} (|u_i^1 - u_i^2| + |p_j^1 - p_j^2|) > \frac{2}{k} \|u^1 - u^2\|_T$$

Ou seja,

$$|p_j^1 - p_j^2| > 2 \|u^1 - u^2\|_T - |u_i^1 - u_i^2| \geq \\ \geq \|u^1 - u^2\|_T, \text{ pois } \|\cdot\|_T \text{ é a norma do má-}$$

ximo. Como os índices de u^1 e u^2 foram escolhidos arbitrariamente, podemos supor $p_j^1 > p_j^2$, obtendo

$$p_j^1 > p_j^2 + \|u^1 - u^2\|_T \\ \geq p_j^2 + |u_s^1 - u_s^2|, \quad s = 1, 2, \dots, m, \text{ por definição de } \|\cdot\|_T \\ \geq p_j^2 + u_s^1 - u_s^2, \quad s = 1, 2, \dots, m$$

Ou, equivalentemente,

$$49 \quad p_j^1 - u_s^1 > p_j^2 - u_s^2 \quad s = 1, 2, \dots, m$$

Mas p_j^1 satisfaz a equação: (ver IV-38)

$$50 \quad \sum_{\alpha_s \in \omega^+(\gamma_j)} h_s(u_s^1 + p_j^1) = \sum_{\alpha_r \in \omega^-(\gamma_j)} h_r(+u_r^1 + p_j^1)$$

Substituindo $p_j^1 - u_i^1$ em (50) pela expressão à direita de (49), obtemos:

$$\begin{aligned}
 51 \quad \sum_{\alpha_s \in \omega^+(\gamma_j)} h_s(u_s^2 + p_j^2) &\leq \sum_{\alpha_s \in \omega^+(\gamma_j)} h_s(u_s^1 + p_j^1) , \text{ pois as funções } h_s \text{ são crescentes} \\
 &= \sum_{\alpha_r \in \omega^-(\gamma_j)} h_r(p_j^1 + u_r^1) , \text{ por (50)} \\
 &\leq \sum_{\alpha_r \in \omega^-(\gamma_j)} h_r(p_j^2 + u_r^2) , \text{ pois as funções } h_r \text{ são crescentes}
 \end{aligned}$$

Confrontando (51) com (IV-38),

$$\sum_{\alpha_s \in \omega^+(\gamma_j)} h_s(u_s^2 + p_j^2) = \sum_{\alpha_r \in \omega^-(\gamma_j)} h_r(p_j^2 + u_r^2)$$

tem-se uma contradição, o que prova (45).

Por raciocínio similar, mostra-se que
 $(\forall u^1, u^2 \in \mathbb{R}^m)$

$$52 \quad \left| h_i(+u_i^1 - p_k^1) - h_i(+u_i^2 - p_k^2) \right| \leq \frac{2}{k} \|u^1 - u^2\|_T$$

onde p_k^1 e p_k^2 satisfazem (IV-39) com $u^* = u^1$ e $u^* = u^2$ respectivamente.

De (44), reagrupando termos e utilizando uma propriedade do módulo, obtemos

$$\begin{aligned} \left| D_i(u^1) - D_i(u^2) \right| &\leq \left| h_i(u_i^1 + p_j^1) - h_i(u_i^2 + p_j^2) \right| + \\ &+ \left| h_i(u_i^1 + p_k^1) - h_i(u_i^2 + p_k^2) \right| \end{aligned}$$

Desta expressão e de (45) e (52), concluímos:

$$\left| D_i(u^1) - D_i(u^2) \right| \leq \frac{4}{k} \|u^1 - u^2\|_T$$

Como tôdas as normas em \mathbb{R} são topològicamente equivalentes, D é lipchitziana. \triangleleft

Por intermédio do lema (41) e das hipóteses (40), concluímos que a função $D.g$ satisfaz a condição de Lipchitz em qualquer compacto contido em $(0, \ell)$. Fica, assim, assegurada a existência e unicidade de soluções do sistema (34) em todos os compactos de $(0, \ell)$. Com êsse resultado, podemos passar a verificar a

Estabilidade Assintótica do Sistema (34).

A estabilidade assintótica de (34) poderia ser facilmente verificada se o conjunto de pontos de equilíbrio tivesse cardinalidade 1. Êsse não é o caso. De fato, se $g(\bar{q})$ é uma solução do problema dual (IV-8), pode-se verificar que $g(\bar{q}) + \alpha \underline{1}$ (onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\underline{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$) é também uma solução do problema dual. Portanto, o conjunto Ω_q contém uma infinidade de pontos e como g é contínua e bije-

tora, êsses pontos são não isolados.

A estabilidade assintótica global, nêsse caso, assume um sentido particular: devemos provar que para todo estado inicial $q^0 \in (0, \ell)$ e instante inicial t_0 , a correspondente solução $q(t; q^0, t_0)$, de (34), satisfaz

$$\left(\lim_{t \rightarrow \infty} q(t; q^0, t_0) \right) \in \Omega_q$$

Chegaremos a êsse resultado utilizando o teorema 2 de LaSalle [6] (ver apêndice B) que é uma extensão do teorema de Liapunov. Para tanto, construiremos uma função de Liapunov, no sentido de LaSalle, para (34).

Seja $\bar{q} \in \Omega_q$ um ponto de equilíbrio qualquer de (34). Seja $G : (0, \ell) \rightarrow \mathbb{R}$ a função contínua definida por:

$$53 \quad (\forall q \in (0, \ell)) \quad G(q) = \sum_{i=1}^m G_i(q_i) - g_i(\bar{q}_i) q_i$$

onde G_1, G_2, \dots, G_m são as funções estritamente convexas e continuamente diferenciáveis definidas em (21). Como as funções G_i , $i=1, 2, \dots, m$, são não limitadas superiormente, então G é não limitada superiormente.

Das definições (24) e (27) das funções g e g_i , $i = 1, 2, \dots, m$, verifica-se, imediatamente, que G é diferenciável e

$$54 \quad \nabla G = g - g(\bar{q})$$

De (54) deduz-se que

$\nabla G(q) = 0$ se e só se $q = \bar{q}$, pois g é uma função bijetora. Logo, como G é estritamente convexa, temos:

$$55 \quad (\forall q \in (0, \ell), q \neq \bar{q}) \quad G(q) > G(\bar{q})$$

Denotemos por $\dot{G}: (0, \ell) \rightarrow \mathbb{R}$ a função, tal que:

$$56 \quad (\forall q \in (0, \ell)) \quad \dot{G}(q) \triangleq \nabla G(q)' D(g(q))$$

Devido a (54), (56) pode ser reescrito como:

$$57 \quad (\forall q \in (0, \ell)) \quad \dot{G}(q) = (g(q) - g(\bar{q}))' D(g(q))$$

A condição para que G seja uma função de Liapunov, segundo LaSalle (ver apêndice B), em $(0, \ell)$, para o sistema (34), é que \dot{G} não mude de sinal em $(0, \ell)$. O lema (58) garante esse resultado.

58 Lema: Se $\bar{q} \in \Omega_q$, então:

$$59 \quad (\forall q \in (0, \ell)) \quad \dot{G}(q) = (g(q) - g(\bar{q}))' D(g(q)) \leq 0$$

Ocorre a igualdade em (59) se e só se $q \in \Omega_q$.

Prova: Seja $\bar{p} \in \mathbb{R}^m$ a solução do problema estático associado. Como $\bar{q} \in \Omega_q$ então $g(\bar{q})$ é solução do problema dual (IV-8) e a solução única do problema (IV-9), com

$u = g(\bar{q})$, será $(\bar{\varphi}, \bar{\varphi})$.

Sejam $q \notin \Omega_q$ e (\bar{x}, \bar{y}) o fluxo dinâmico solução do problema (IV-9) com $u = g(q)$. Por definição da função D temos que $D(g(q)) = \bar{y} - \bar{x}$ que é não nulo, pois $q \notin \Omega_q$. Como a solução do problema (IV-9) é única, temos, em particular, que

$$60 \quad \sum_{i=1}^m f_i(\bar{x}_i) + \sum_{i=1}^m f_i(\bar{y}_i) + g(q)'(\bar{y} - \bar{x}) < \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) + f_i(\bar{\varphi}_i)$$

Por outro lado, como $(\bar{\varphi}, \bar{\varphi})$ é solução única de (IV-9) com $u = g(\bar{q})$ segue:

$$61 \quad \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) + \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) < \sum_{i=1}^m f_i(\bar{x}_i) + \sum_{i=1}^m f_i(\bar{y}_i) + g(\bar{q})'(\bar{y} - \bar{x})$$

De (60) e (61) obtemos que

$$g(q)'(\bar{y} - \bar{x}) < g(\bar{q})'(\bar{y} - \bar{x})$$

ou seja:

$$(g(q) - g(\bar{q}))'D(g(q)) < 0$$

Se $q \in \Omega_q$ então $D(g(q)) = 0$ e então:

$$(g(q) - g(\bar{q}))'D(g(q)) = 0$$

o que prova o lema. \triangleleft

O lema (58) caracteriza G como uma função de Liapunov de (34) em $(0, \ell)$. Além disso, assegura a igualdade:

$$62 \quad \Omega_q = \left\{ q \in (0, \ell) \mid \nabla G(q)' D(g(q)) = 0 \right\}$$

Tais resultados permitem-nos provar o teorema seguinte, que assegura a existência de soluções de (34) para todo $t \geq 0$ e a estabilidade assintótica a Ω_q .

63 Teorema: Sejam $q^0 \in (0, \ell)$ um estado inicial do sistema (34) e $t_0 \in \mathbb{R}$ o instante inicial. Então:

- a) existe uma única solução $q(t; q^0, t_0) \in (0, \ell)$, $t \geq t_0$, de (34), passando por q^0 em t_0 .
- b) a solução $q(t; q^0, t_0)$ satisfaz:

$$64 \quad \left(\lim_{t \rightarrow \infty} q(t; q^0, t_0) \right) \in \Omega_q$$

Prova: Dados $q^0 \in (0, \ell)$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ seja $R_0 \subset (0, \ell)$ o conjunto:

$$65 \quad R_0 \triangleq \left\{ q \in (0, \ell) \mid G(q) \leq G(q^0) \right\}$$

Como G é contínua e não limitada superiormente, o conjunto R_0 é fechado; como $R_0 \subset (0, \ell)$, R_0 é compacto. Então, usando o lema (41), concluimos que $D.g$ é lipchitziana em R_0 .

Portanto, para todo $q^* \in R_0$ e $t^* \in \mathbb{R}$ existe uma

única solução $q(t; q^*, t^*)$ de (34) em um intervalo de tempo $[t^*, a^*]$, $a^* > t^*$. Mostraremos, agora, que

$$66 \quad (\forall q^* \in R_0) \quad (\forall t \in [t^*, a^*]) \quad q(t; q^*, t^*) \in R_0$$

Se $q^* \in R_0$ então, da definição de G ,

$$67 \quad (\forall t \in [t^*, a^*]) \quad \frac{d G(q(t; q^*, t^*))}{dt} = \dot{G}(q(t; q^*, t^*))$$

onde a função \dot{G} foi definida em (56). Do lema (58) e de (67) resulta:

$$68 \quad (\forall t \in [t^*, a^*]) \quad \frac{d G(q(t; q^*, t^*))}{dt} \leq 0$$

Então: $(\forall t \in [t^*, a^*])$

$$69 \quad G(q(t; q^*, t^*)) - G(q^*) = \int_0^t \frac{d G(q(\xi; q^*, t^*))}{d \xi} d \xi \leq 0$$

Comparando (69) com a definição (65) de R_0 , obtemos (66).

De (65) e (66) concluímos que a solução $q(t; q^0, t_0)$ permanece no compacto R_0 para todo instante t , no qual esta solução existe. Como $D.g$ é lipchitziana em R_0 , então a solução $q(t; q^0, t_0)$ pode ser estendida para todo $t \geq t_0$ (ver Nemytskii [7], pág. 8). Ainda, pela condição de Lipchitz, podemos garantir que a solução $q(t; q^0, t_0)$ é única.

Mostremos que a condição b) do teorema é válida.

Como \bar{q} é mínimo de G , de (65) concluímos que $R_0 \cap \Omega_q$

é não vazio. Aplicando o teorema 2 de LaSalle [6] (apêndice B) concluímos que a solução $q(t; q^0, t_0)$ ou diverge, ou tende, no limite, ao maior subconjunto invariante de

$$70 \quad E = \left\{ q \in R_0 \mid \dot{G}(q) = 0 \right\}$$

A primeira hipótese está excluída, pois $q(t; q^0, t_0)$ permanece em R_0 que é compacto. Mas, de (62) e (70) concluímos que

$$E = R_0 \cap \Omega_q$$

Logo, E é um conjunto invariante e

$$\left(\lim_{t \rightarrow \infty} q(t; q^0, t_0) \right) \in E \subset \Omega_q \quad \triangleleft$$

Com a demonstração do teorema (63), fica concluída a prova de que a política de controle (29) é solução do (PDT2). De fato, da própria construção da política de controle, temos satisfeitas a conservação do fluxo e a sua viabilidade. Do teorema (63) concluímos a viabilidade do excedente ao longo do tempo. Resultam do teorema (63) a estabilidade assintótica do sistema (34) e a otimalidade do regime, devido ao lema (38).

Como dissemos anteriormente, a política de controle solução do (PDT2) depende do excedente instantâneo; contudo, independe do excedente inicial. Além disso, como a

função $D.g$ é contínua, conclui-se que o regime do sistema (34) é atingido em tempo finito se e somente se o excedente inicial pertencer a Ω .

SECÇÃO 4 - CONCLUSÃO

O estudo da informação adicional em (PDT3) mostrou-nos ser impossível uma independência completa entre o contrôle e o excedente instantâneo. Em (PDT3), a informação adicional poderia ser utilizada para a melhoria da solução de (PDT2), ou para construir soluções do (PDT3) discretizado. Estas possibilidades não fôram estudadas neste trabalho.

Em (PDT2), devido à dinâmica da rêde e à política adotada, resulta um sistema dinâmico estável em cujos pontos de equilíbrio os fluxos dados pela política solução resolve o (PT) associado.

As funções penalidade g_i têm um papel importante na solução. Para a construção dessas funções, os centros de contrôle em (PDT2) necessitam apenas do conhecimento de ℓ . A definição da função g_i pode ser feita a partir do parâmetro ℓ_i de forma que dois controladores adjacentes construam a mesma função para o ramo que lhes é adjacente. Da "inclinação" das funções g_i dependerá a "rapidez" com que o sistema dinâmico tende ao regime.

A hipótese de convexidade estrita das funções custo não impede a aplicação das soluções propostas ao caso de funções custo lineares. No capítulo seguinte mostramos como êsse problema pode ser resolvido.

C A P Í T U L O V I

PROBLEMAS DINÂMICOS DE TRANSPORTE E CUSTOS LINEARES

No capítulo anterior vimos como construir políticas de controle que solucionem o segundo e o terceiro problemas dinâmicos de transporte. Para que as políticas propostas satisfizessem os requisitos dos enunciados dos problemas, algumas hipóteses foram assumidas. Em particular, assumíamos que as funções custo fossem estritamente convexas.

Tal hipótese, embora básica para a construção das políticas, é bastante restritiva em alguns casos. Por exemplo, elimina a possibilidade de usarmos aquelas soluções em problemas de transporte com custo linear. Neste capítulo, mostraremos como é possível contornar essa restrição.

O tratamento de problemas dinâmicos de transporte com custo linear, através das soluções dadas no capítulo anterior, pode ser feito transformando o problema linear em um problema estritamente convexo. Basicamente, o que faremos é, a partir do vetor custo, definir funções custo estritamente convexas e contínuas, tais que o problema estático de transporte convexo resultante tenha, como solução única, uma solução do problema linear.

As funções custo estritamente convexas serão construídas de forma que sejam iguais aos custos lineares a menos de um "pequeno encurvamento". Formalmente, a condição de um pequeno encurvamento será expressa por um intervalo de variação admissível para a derivada de cada função custo convexa, intervalo esse que contém a componente correspondente do vetor custo.

O comprimento máximo de cada intervalo dependerá do vetor custo. Como nos segundo e terceiro problemas dinâmicos os controladores só têm informações locais, o comprimento dos intervalos deverá ser fixado independentemente do conjunto das componentes do vetor custo. Como veremos, isto é possível introduzindo-se uma hipótese adicional: as componentes do vetor custo são inteiras.

Para apresentarmos este resultado, consideremos

uma rede (N,A) com n nós e m ramos, tendo M como matriz de incidência. Sejam $b,d \in \mathbb{R}^m$ tais que $0 \leq b \leq d$ e $c \in \mathbb{R}^m$ o vetor custo. O problema estático de transporte na rede (N,A) com custo c e intervalo de viabilidade de fluxo $[b,d]$ é o problema:

$$1 \quad (\text{PTL}) \quad \begin{array}{l} \text{Min} \\ \varphi \in \Phi(b,d) \end{array} c' \varphi$$

onde

$$2 \quad \Phi(b,d) = \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^m \mid M \varphi = 0, b \leq \varphi \leq d \right\}$$

3 Seja $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa e diferenciável satisfazendo:

$$4 \quad (\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0) \quad \left| \frac{d \delta(x)}{dx} \right| < \frac{1}{m}$$

5 Consideremos as funções $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$, dadas por:

$$6 \quad (\forall x_i \in \mathbb{R}) \quad f_i(x_i) = c_i x_i + \delta(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Então, de (4) e (6) concluímos que: (i = 1, 2, \dots, m)

$$7 \quad (\forall x_i \in [b_i, d_i]) \quad \left| \frac{df_i(x_i)}{dx_i} - c_i \right| < \frac{1}{m}$$

O teorema que segue garante que a solução do problema estático de transporte em (N,A) com custos f_i , é solução de (PTL). A prova do teorema utiliza um critério de

otimalidade para (PTL) devido a Busacker [12] (ver apêndice C).

8 Teorema: Suponhamos que o vetor custo $c \in \mathbb{R}^m$ tenha componentes inteiras. Se $\bar{\varphi} \in \Phi(b, d)$ é solução do problema:

$$9 \quad \text{Min}_{\varphi \in \Phi(b, d)} \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i)$$

então, $\bar{\varphi}$ é solução do (PTL).

Prova: Seja $\bar{\varphi}$ a solução do problema (9). Então, como as funções f_i são estritamente convexas, temos:

$$10 \quad (\forall \varphi \in \Phi(b, d), \varphi \neq \bar{\varphi}) \quad \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) < \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i)$$

Suponhamos, por absurdo, que $\bar{\varphi}$ não é solução de (PTL). Pelo teorema de otimalidade para (PTL) (ver apêndice C), concluimos que existem $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ e um ciclo $\mu \in \mathbb{R}^m$ de (N, A) , tais que:

$$11 \quad (\forall \alpha \in [0, \beta]) \quad \bar{\varphi} + \alpha \mu \in \Phi(b, d)$$

$$12 \quad c' \mu < 0$$

Como os vetores c e μ têm componentes inteiras, resulta de (12)

$$13 \quad c' \mu \leq -1$$

Denotemos por F a função de \mathbb{R}^m em \mathbb{R} dada por:

$$14 \quad (\forall \varphi \in \mathbb{R}^m) \quad F(\varphi) = \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i)$$

Então, de (10), (11) e (14) obtemos que, em particular:

$$(\forall \alpha \in (0, \beta]) \quad F(\bar{\varphi} + \alpha\mu) - F(\bar{\varphi}) > 0$$

Como F é diferenciável (as funções f_i são diferenciáveis) então existe $\sigma \in \mathbb{R}$, $\beta \geq \sigma > 0$, tal que:

$$(\forall \alpha \in (0, \sigma)) \quad \nabla F(\bar{\varphi})'(\bar{\varphi} + \alpha\mu - \bar{\varphi}) > 0$$

o que implica em

$$15 \quad \nabla F(\bar{\varphi})' \mu > 0$$

De (13) e (15) concluímos que μ define um hiperplano H em \mathbb{R}^m separando estritamente $\nabla F(\bar{\varphi})$ e c .

A distância euclidiana do vetor c ao hiperplano H é dada por:

$$16 \quad d(c, H) \triangleq \inf \left\{ \|x - c\| \mid x \in H \right\} = \frac{|c' \mu|}{\|\mu\|}$$

Mas, como μ tem componentes iguais a 0, 1 e -1, temos que

$$\|\mu\| \leq \sqrt{m}$$

e, portanto, de (16) e (13) resulta:

$$17 \quad d(c, H) \geq \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Como o hiperplano H separa $\nabla F(\bar{\varphi})$ de c , temos, de (16) e (17) que:

$$18 \quad \|\nabla F(\bar{\varphi}) - c\| \geq d(c, H) \geq \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Mas, por definição da norma euclideana,

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \left| \frac{df_i(\bar{\varphi}_i)}{dx} - c_i \right| \geq \|\nabla F(\bar{\varphi}) - c\| \geq \frac{1}{\sqrt{m}}$$

e então, de (18), segue:

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \left| \frac{df_i(\bar{\varphi}_i)}{dx} - c_i \right| \geq \frac{1}{m}$$

o que contradiz (7). Logo $\bar{\varphi}$ é solução de (PTL). \triangleleft

A aplicabilidade do teorema (8) a problemas dinâmicos com custo linear é evidente. Para cada função $\delta(\cdot)$ satisfazendo (3) podemos construir uma solução para (PDT2) ou (PDT3) com custo linear. De fato, a função f_i depende somente de c_i e de $\delta(\cdot)$, portanto, cada controlador tem condições de construir as funções f_i nos seus ramos adjacentes a partir do seu espaço de informações e de $\delta(\cdot)$.

C A P Í T U L O V I I

CONCLUSÃO

Procuramos, nos capítulos precedentes, obter soluções para problemas dinâmicos de transporte com a maior descentralização possível dos contrôles. Na classe de problemas em que os controladores estão colocados nos nós da rede, o (PDT2), apresentado no capítulo III parece-nos atin gir a meta acima.

A relativa complexidade das soluções obtidas sugere alguns temas para pesquisas futuras. Citamos: a busca de soluções de implementação mais simples usando a informação adicional intercontroladores do (PDT3), a resolução direta de problemas de transporte lineares, e o estudo de problemas discretizados.

A análise de problemas de transporte em redes com fluxo dinâmico é de especial interêsse para o estudo de con

trôle descentralizada. Um exemplo de aplicação do modelo de rêdes com fluxo dinâmico e contrôle descentralizado encontra-se em modelos de tráfego urbano.

O problema de tráfego que consiste na busca de um fluxo de carros em um sistema de ruas que maximize o fluxo de carros saliente do sistema é um problema de transporte. O contrôle do tráfego pode ser feito através de um centro único de decisão estabelecendo, então, o fluxo ótimo. Uma descentralização possível, nesse caso, seria distribuir-se o contrôle do tráfego entre controladores sediados em cruzamentos.

Neste exemplo, cada controlador (guarda de trânsito, por exemplo), teria contrôle sôbre os fluxos de carros entrantes e salientes de sua esquina. O excedente seria o número de carros em cada rua. A implantação da solução de (PDT2) a êsse sistema permite que cada controlador tome de cisões baseando-se nas limitações de cada rua adjacente à sua esquina e do número de carros presente nas mesmas. O conjunto de decisões dos policiais mantém os fluxos de carros nas ruas dentro de seus limites viáveis e faz o fluxo total tender ao fluxo máximo.

A P Ê N D I C E A

DUALIDADE EM PROBLEMAS CONVEXOS

Apresentamos aqui os principais resultados de dualidade em problemas convexos de otimização. Os resultados relativos a subgradientes e subdiferenciais podem ser encontrados em Rockafellar [8] e aqueles relativos a dualidade, em Geoffrion [2]. Vamos restringir-nos à apresentação dos resultados, sem preocupação com provas e detalhes que são extensamente estudados nas referências citadas.

Subgradientes e Subdiferenciais.

1 Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto convexo e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa em X .

2 Definição: Um vetor $w \in \mathbb{R}^m$ é subgradiente de f em $x \in X$ se e só se

$$(\forall y \in X) \quad f(y) \geq f(x) + w'(y-x)$$

O conceito de subgradiente de uma função convexa é uma extensão do conceito de gradiente. Se f é diferenciável em $x \in X$ então o gradiente $\nabla f(x)$ é o único subgra-

diente de f em x .

O conjunto de subgradientes, em um ponto, de uma função convexa definida em um intervalo da reta real assume uma forma particular. Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, uma função convexa. Se f possui derivada à direita $f^+(x)$ em $x \in I$ e possui derivada à esquerda $f^-(x)$ então o conjunto de subgradientes de f em x é dado por:

$$3 \quad \partial f(x) \triangleq [f^-(x), f^+(x)]$$

Se f não possui derivada à direita e à esquerda em $x \in I$, então f não tem subgradiente em x .

4 Definição: Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto convexo e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. A subdiferencial de f , denotada ∂f , é aplicação de X em $P(\mathbb{R}^m)$ que a cada $x \in X$ associa o conjunto de subgradientes de f em x . A função f é dita subdiferenciável em $x \in X$ se $\partial f(x) \neq \emptyset$

As subdiferenciais de funções convexas de variável real e valores em \mathbb{R} , são "curvas não decrescentes sobre \mathbb{R} "; ou seja, se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, é convexa, então f satisfaz:

$$5 \quad a) \quad (\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \geq x_2) \quad (\forall w^1 \in \partial f(x_1)) \\ (\forall w^2 \in \partial f(x_2)) \quad w^1 \geq w^2$$

$$6 \quad b) \quad (\forall w \in \mathbb{R}) \quad (\exists x \in I)$$

$$w \in \partial f(x)$$

Se f fôr estritamente convexa, então ∂f admite uma "função inversa" no seguinte sentido: existe uma função $h: \mathbb{R} \rightarrow I$, crescente, contínua e sobrejetora satisfazendo:

$$7 \quad (\forall w \in \mathbb{R}) \quad w \in \partial f(h(w))$$

ou seja:

$$8 \quad (\forall x \in I) \quad (\forall w \in \partial f(x)) \quad h(w) = x$$

Sejam $I_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, intervalos e f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, funções convexas. Seja $f: I_1 \times I_2 \times \dots \times I_m \rightarrow \mathbb{R}$ a função convexa dada por:

$$(\forall x \in I_1 \times I_2 \times \dots \times I_m) \quad f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x_i)$$

Então, $(\forall x \in I_1 \times I_2 \times \dots \times I_m)$

$$9 \quad \partial f(x) = \partial f_1(x_1) \times \partial f_2(x_2) \times \dots \times \partial f_m(x_m)$$

ou seja, $w \in \mathbb{R}^m$ é subgradiente de f se e só se w_i é subgradiente de f_i , $i = 1, 2, \dots, m$.

Os resultados acima podem ser encontrados, com as respectivas demonstrações, em Rockafellar [8], pág.

Dualidade.

A forma canônica do problema primal é:

$$\begin{aligned} 10 \quad (P) \quad & \text{Min} \quad f(x) \\ & x \in X \\ & \text{suj. a} \quad g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

onde $X \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$

Assumimos que, em (P), X é convexo e tôdas as funções envolvidas são convexas em X .

O problema dual de (P) em relação ao vínculo g , é:

$$11 \quad (D) \quad \begin{array}{l} \text{Max} \\ u \in \mathbb{R}^n \\ u \geq 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Inf} \\ x \in X \end{array} f(x) + u'g(x) \right\}$$

O vetor u é a variável dual de (P).

12 Definição: O valor ótimo de (P) é o ínfimo do conjunto $\left\{ f(x) \mid x \in X, g(x) \leq 0 \right\}$. O valor ótimo de (D) é o supremo do conjunto

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Inf} \\ x \in X \end{array} f(x) + u'g(x) \mid u \in \mathbb{R}^n, u \geq 0 \right\}$$

Assumimos que

$$13 \quad \text{Inf } \emptyset \neq +\infty$$

$$14 \quad \text{Sup } \emptyset = -\infty$$

onde \emptyset denota o conjunto vazio. Dessa forma, (P) e (D) admitem, sempre, valores ótimos possivelmente $+\infty$ ou $-\infty$.

15 Definição: O par de vetores $(\bar{x}, \bar{u}) \in X \times \mathbb{R}^m$ satisfaz as condições de otimalidade para (P) se:

$$a) (\forall x \in X) \quad f(\bar{x}) + \bar{u}'g(\bar{x}) \leq f(x) + \bar{u}'g(x)$$

$$b) \bar{u}'g(\bar{x}) = 0$$

$$c) \bar{u} \geq 0$$

$$d) g(\bar{x}) \leq 0$$

O vetor \bar{u} é um multiplicador ótimo para (P) se existe $\bar{x} \in X$ tal que (\bar{x}, \bar{u}) satisfaz as condições de otimalidade para (P).

As condições de otimalidade são equivalentes a um ponto de sela da função lagrangeana no seguinte sentido: $(\bar{x}, \bar{u}) \in X \times \mathbb{R}^m$ satisfaz as condições de otimalidade se e só se $\bar{u} \geq 0$ e

$$(\forall u \in \mathbb{R}^m, u \geq 0) \quad (\forall x \in X)$$

$$f(\bar{x}) + u'g(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + \bar{u}'g(\bar{x}) \leq f(x) + \bar{u}'g(x)$$

Por outro lado, $(\bar{x}, \bar{u}) \in X \times \mathbb{R}^m$ satisfaz as condições de otimalidade se e só se \bar{x} é solução de (P), \bar{u} é solução de (D) e os valores ótimos de (P) e (D) são iguais. Os resultados acima independem de convexidade das funções f e g .

16 Definição: A função perturbação associada a (P) é a função $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $(\forall y \in \mathbb{R}^n)$

$$v(y) = \text{Inf} \left\{ f(x) \mid x \in X, \quad g(x) \leq y \right\}$$

O vetor y é dito vetor perturbação.

Das definições (12) e (16), conclui-se imediatamente que o valor ótimo de (P) é igual a $v(0)$. A função v é convexa e satisfaz:

$$(\forall y^1, y^2 \in \mathbb{R}^n, y^1 \geq y^2) \quad v(y^1) \leq v(y^2)$$

17 Definição: O problema (P) é estável se e só se $v(0)$ é finito e existe $L \in \mathbb{R}, L > 0$ tal que:

$$18 \quad \frac{v(0) - v(y)}{\|y\|} \leq L \quad (\forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0)$$

A condição (18) da definição de estabilidade de (P) é equivalente à existência de um subgradiente de v em $y = 0$.

O teorema seguinte justifica a importância do conceito de estabilidade de (P) para a teoria de dualidade.

19 Teorema: Suponhamos que (P) admite uma solução. Então, existe um multiplicador ótimo para (P) se e só se (P) é estável.

O teorema (19) caracteriza a estabilidade de (P) como uma condição necessária e suficiente para a existência de solução do problema de ponto de sela associado a (P). Portanto, qualquer condição de qualificação de vínculos para (P) implica em estabilidade de (P).

Apresentamos a seguir o teorema de dualidade de Geoffrion [2] onde a hipótese de que (P) é estável é essencial.

20 Teorema: Se (P) é estável, então:

- a) (D) admite solução
- b) os valores ótimos de (P) e (D) são iguais.
- c) $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ é solução ótima de (D) se e só se $-\bar{u}$ é subgradiente de v em $y = 0$.
- d) se $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ é solução de (D), então, $\bar{x} \in X$ é solução de (P) se e só se (\bar{x}, \bar{u}) satisfaz as condições de otimalidade.

O teorema (20) caracteriza as relações entre os problemas (P) e (D). A hipótese de estabilidade é fundamental e, não há necessidade de existir uma solução de (P) para que o teorema seja válido.

Os resultados e definições apresentados nesta última parte podem ser encontrados em Geoffrion [2]. Rockafellar [8] utiliza uma abordagem um pouco diferente, utilizando, contudo, os conceitos de função perturbação e estabilidade.

Apresentaremos a seguir, uma condição que implicará em estabilidade do problema (P), no caso em que X é um conjunto poliédrico e g é uma função linear afim. Para a prova deste resultado necessitaremos do seguinte teorema, devido a Rockafellar.

21 Teorema: Suponhamos que f é subdiferenciável em X . O vetor $\bar{x} \in X$ é solução do problema (P) se e só se

$$a) \quad g(\bar{x}) \leq 0$$

$$22 \quad b) \quad (\exists \bar{w} \in \partial f(\bar{x})) \quad (\forall x \in X, \quad g(x) \leq 0)$$

$$\bar{w}'(x - \bar{x}) \geq 0$$

Prova: ver Rockafellar [8], pág. 270.

Consideremos, agora, o problema:

$$23 \quad \begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ x \in X \end{array}$$

$$24 \quad \text{sujeito a } g(x) = Mx - a \leq 0$$

onde $X \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto convexo poliédrico, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, M uma matriz $n \times m$, $a \in \mathbb{R}^n$

25 Teorema: Se f é subdiferenciável em X e o problema (23) admite solução, então (23) é estável.

Demonstração: Sejam $\bar{x} \in X$ solução de (23) e v a função perturbação de (23), ou seja,

$$(\forall y \in \mathbb{R}^n) \quad v(y) = \inf_{x \in X} \{ f(x) \mid g(x) \leq y \}$$

Como f é subdiferenciável, temos $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$.

Seja $\bar{w} \in \partial f(\bar{x})$ um vetor satisfazendo

$$26 \quad (\forall x \in X, \quad g(x) \leq 0) \quad \bar{w}'(x - \bar{x}) \geq 0$$

Pelo teorema (21), \bar{w} existe. Definindo a função

$$f^*: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que}$$

$$27 \quad f^*(x) = f(\bar{x}) + \bar{w}'(x - \bar{x})$$

temos, por definição de subgradiente, que

$$28 \quad (\forall x \in X) \quad f^*(x) \leq f(x)$$

Consideremos, agora, o problema:

$$29 \quad \min_{x \in X} f^*(x), \quad \text{suj. a} \quad g(x) \leq 0$$

Como X é poliedrico, podemos escrever

$X = \{x \in \mathbb{R}^m \mid h(x) \leq 0\}$, onde $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma função linear e o problema (29) fica

$$30 \quad \min_{x \in \mathbb{R}^m} f^*(x), \quad \text{suj. a} \quad \begin{bmatrix} g(x) \\ h(x) \end{bmatrix} \leq 0$$

Mas de (26) e (27) temos que

$$31 \quad \left\{ \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad g(x) \leq 0, \quad h(x) \leq 0 \right\} \quad f^*(x) \geq f(\bar{x})$$

$$32 \quad \text{e} \quad f^*(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

Logo, o problema (30) tem valor ótimo igual a $f(\bar{x})$ e como é um problema de programação linear, é estável. Introduzindo a função perturbação v^* de (30), temos $\forall y^* \in \mathbb{R}^{m+k}$

$$y^* = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad z \in \mathbb{R}^k, \quad y \neq 0$$

$$33 \quad \frac{v^*(0) - v^*(y^*)}{\|y^*\|} \leq L, \quad \text{onde } L \in \mathbb{R}, \quad L > 0$$

Em particular, se tomarmos $z = 0$, i. é, $y^* = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$, $y \in \mathbb{R}^m$, teremos ($\forall y \in \mathbb{R}^m$)

$$\begin{aligned} 34 \quad v^*\left(\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \inf \left\{ f^*(x) \mid g(x) \leq y, h(x) \leq 0 \right\} \\ &= \inf_{x \in X} \left\{ f^*(x) \mid g(x) \leq y \right\}, \quad \text{por definição de } h \\ &\leq \inf_{x \in X} \left\{ f(x) \mid g(x) \leq y \right\}, \quad \text{devido a (27)} \\ &= v(y), \quad \text{por definição de } v. \end{aligned}$$

Mas, $\left\| \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \|y\|$ e devido a (32), $v^*(0) = v(0) = f(\bar{x})$

Portanto, $\forall y \in \mathbb{R}^m, \quad y \neq 0$

$$\begin{aligned} 35 \quad \frac{v(0) - v(y)}{\|y\|} &= \frac{v^*(0) - v(y)}{\|y^*\|} \\ &\leq \frac{v^*(0) - v^*(y^*)}{\|y^*\|}, \quad \text{devido a (34)} \end{aligned}$$

Ou seja, comparando (35) com (33)

$$(\forall y \in \mathbb{R}^m) \quad \frac{v(0) - v(y)}{\|y\|} \leq L, \quad y \neq 0$$

o que garante a estabilidade do problema (23), concluindo nossa demonstração. \triangleleft

A condição do teorema (25) será usada em todo o nosso trabalho, para garantir a estabilidade do problema de transporte.

A P Ê N D I C E BUM TEOREMA DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DINÂMICOS

Apresentaremos aqui um critério de estabilidade para sistemas dinâmicos com um conjunto não necessariamente unitário de pontos de equilíbrio. O resultado é devido a LaSalle [6] (ver pág. 281)

Consideremos o sistema autônomo

$$1 \quad \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^m$, $\forall t \geq 0$, e $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função contínua satisfazendo a qualquer condição que garanta unicidade de soluções de (1).

Se $x^0 \in \mathbb{R}^m$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, denotamos por $x(t; x^0, t_0)$ o valor da solução de (1) passando por x^0 em $t = t_0$. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^m$ é dito conjunto invariante do sistema (1) se para todo $x^0 \in E$ a solução $x(t; x^0, 0)$ de (1) satisfaz:

$$(\forall t \geq 0) \quad x(t; x^0, 0) \in E$$

Uma função $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, continuamente diferenciável é uma função de Liapunov para o sistema (1) em $R_0 \subset \mathbb{R}^m$ se a função $\dot{G}(.) = \nabla G(.) \cdot f(.)$ não muda de sinal em R_0 .

Dada uma função de Liapunov em R_0 , para o sistema (1), denotada G , consideremos o conjunto:

$$E = \left\{ x \in \bar{R}_0 \mid \dot{G}(x) = 0 \right\}$$

onde \bar{R}_0 é a aderência de R_0 . Seja $S \subset E$ o maior conjunto invariante contido em E . O teorema fundamental de estabilidade para sistemas autônomos é o seguinte:

Teorema 2 (LaSalle) Se G é uma função de Liapunov em R_0 de (1), então, para cada $x^0 \in R_0$ tal que $x(t; x^0, 0)$ permanece em R_0 temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x^0, 0) \in S$$

ou a solução $x(t; x^0, 0)$ diverge quando $t \rightarrow \infty$.

A P Ê N D I C E C

UM TEOREMA DE OTIMALIDADE

PARA PROBLEMAS DE TRANSPORTE COM CUSTO LINEAR

O teorema de otimalidade que apresentamos para o (PTL) (VI-1) é devido a Busacker [12] . Partimos do enunciado do teorema citado em Klein [13] .

Consideremos uma rede (N,A) , com n nós e m ramos e o problema de transporte linear (PTL), em (N,A) , com vetor custo $c \in \mathbb{R}^m$, intervalo de viabilidade de fluxo $[b,d]$, $b,d \in \mathbb{R}^m$, $0 \leq b \leq d$. Seja $\Phi(b,d)$ o conjunto de pontos viáveis de (PTL)

$$\Phi(b,d) = \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^m \mid M \varphi = 0, \varphi \in [b,d] \right\}$$

onde M é a matriz de incidência de (N,A) .

Teorema: O vetor $\bar{\varphi} \in \Phi(b,d)$ é solução de (PTL) se e só se para todo ciclo $\mu \in \mathbb{R}^m$ de (N,A) e $\beta > 0$

satisfazendo:

$$(\forall \alpha \in [0, \beta]) \quad \bar{\varphi} + \alpha \mu \in \Phi(b, d)$$

tivermos

$$c' \mu \geq 0$$

O teorema acima pode ser provado a partir do teorema de otimalidade (II-36). Klein [13] desenvolve um algoritmo para a resolução de (PTL) baseado neste resultado.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BERGE, C. et GHOUILA-HOURI, A.: Programmes, jeux et réseaux de transport. Paris, Dunod, 1962.
- [2] GEOFFRION, A. M.: Duality in nonlinear programming: a simplified applications-oriented development. Los Angeles. University of California, working paper nº 150, 1970.
- [3] FORD, L. R. and FULKERSON, D. R.: Flows in networks. Princeton. Princeton University Press, 1962.
- [4] RADNER, R.: Linear programming and team decision problems. Management Science vol. 5 , nº 2 , 1959
- [5] MARSCHAK, J.: Elements for a theory of teams. Management Science vol. 1, 1955
- [6] LASALLE, J. P.: "An invariance principle in theory of stability" in: HALLE, J. K. and LASALLE J. P.: Differential equations and dynamical systems. New York. Academic Press, 1967, pág. 277.
- [7] NEMYTSKII, V. and STEPANOV, V.: Qualitative theory of differential equations. Princeton. Princeton University Press, 1960.

- [8] ROCKAFELLAR, R. T.: Convex analysis. Princeton. Princeton University Press, 1970.
- [9] WAGNER, H. M.: Principles of operations research. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1969.
- [10] BERGE, C.: Teoria de las redes y sus aplicaciones. Mexico. Compañía Editorial Continental, 1962.
- [11] HOFFMAN, A. J.: Some recent applications to extremal combinatorial analysis. Proc. Symposia on Applied Math. vol. 10, 1960.
- [12] BUSACKER, R. G. and SAATY, T. L.: Finite graphs and networks. New York McGraw-Hill, 1965.
- [13] KLEIN, M.: A primal method for minimal cost flows with applications to the assignement and transportantion problems. Management Science vol. 14 nº 3, nov. 1967.